UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa.

División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Departamento de Matemáticas.

Casa abierta al tiempo

Tesis de Maestría en Ciencias
en Matemáticas Aplicadas e Industriales:

SOBRE EL EFECTO DE LA DINÁMICA LABORAL, LA TECNOLOGÍA Y EL SECTOR INFORMAL EN EL CRECIMIENTO ECONÓMICO.

PRESENTA:
Eduardo Macario Moctezuma Navarro.

ASESORES:
Dr. Joaquín Delgado Fernández y Dr. David Arie Mayer Foulkes.

Dedicatoria:

A mis padres: Pedro Moctezuma Rodríguez y Martha Sonia Navarro Frías.
A mi esposa: Erika Isaura Sánchez Puebla.
A mi hijo: Isaías Macario Moctezuma Sánchez.
A mi abuelo, Macario Navarro Ríos y a mi tía–abuela Genoveva Navarro Ríos.

Agradecimientos:

Doy gracias a Dios por la oportunidad que me ha dado de llegar hasta aquí a pesar de mis errores, y le doy gracias por todo lo que siga después, que sólo Él sabe a detalle, así como por todas sus bendiciones y también por las dificultades. Cuando tuve fracasos se debió a que me alejé de Ti, no porque fueras razón de mis derrotas pues al contrario Tú nunca me olvidaste. Todos mis éxitos se deben a Ti. Todo lo bueno que tengo lo tengo por Ti.

A mis padres, Pedro Moctezuma Rodríguez y Martha Sonia Navarro Frías, por su amor incondicional, ejemplo y apoyo; en forma muy especial les agradezco por el hogar que me dieron y por sus esfuerzos, desvelos y preocupaciones para que yo pudiera tener un buen futuro; y sobretodo, por inculcarme temor a Dios de muchas maneras.

A mi abuelo, Macario Navarro Ríos y a mi tía–abuela Genoveva Navarro Ríos por su ejemplo de vida, por su cariño y por haber simpatizado con mi causa a lo largo de todo este tiempo.

A mi esposa Erika Isaura Sánchez Puebla por sus cuidados y por su ayuda en la labor de ser padres y formar un hogar, pero antes que nada por haberme aceptado en su vida y permitirme cumplir con el papel de su esposo y compañero.

A mi hijo Isaías Macario Moctezuma Sánchez por ser fuente de inspiración y de alegría, y motivo para luchar. Mi vida cambió para bien desde tu feliz llegada. Te quiero mucho bebé chiquitito.

A mi hermana Claudia Verónica Navarro Frías, por su dulzura, cariño y lealtad siempre presentes.

A la Universidad Autónoma Metropolitana por la oportunidad de formarme en sus aulas y por darme una beca para ello, durante la mayor parte de la maestría.

Al programa ECOES–Santander–Universia por su financiamiento y apoyo logístico para realizar la estancia de investigación con la que concluí la parte que me restaba de la tesis.

Al Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia por su apoyo decidido y compromiso firme hacia mi persona y mi familia, primero como profesor y luego como coordinador del postgrado, desde mi etapa como alumno soltero en la que mis dificultades eran otras, hasta cuando llegué a estar casado y hubo momentos más difíciles todavía; en todos los aspectos que un amigo y profesor puede ayudar a un alumno, así fui ayudado por usted.

Al Dr. Joaquín Delgado Fernández por su paciencia, por su amistad y por su apoyo logístico, moral y aún económico durante el transcurso de la maestría; así como por (y de forma muy importante) haberme permitido y alentado a buscar un camino propio en la investigación, a pesar de tener una formación académica en licenciatura distinta a lo que mis intereses posteriores pudieran llevarme.

Al Dr. David Arie Mayer Foulkes por su buena disposición, amabilidad, comprensión y paciencia, así como por darme siempre un espacio en su apretada agenda y enseñarme mucho de lo que sé sobre crecimiento económico, y sobretodo por haberme dado la oportunidad de ver cómo se hace investigación de alto nivel en el área y mostrarme de manera siempre amable el duro camino para desarrollar modelos propios.

Al Dr. Leobardo Pedro Plata Pérez, por sus comentarios motivadores y enriquecedores que han sido un fuerte impulso para continuar en esta aventura, así como por darme un espacio en su agenda y trabajo de investigación para exponer en San Luis Potosí los avances presentados en esta tesis. Usted conoce bien las dificultades para trabajar economía matemática en México, gracias por darme herramientas y consejos para sortearlas.

Al Dr. Felipe de Jesús Peredo y Rodríguez, por su magnífico ejemplo como docente y persona, por todos sus conocimientos transmitidos y por brindarme su generosa amistad y consejos siempre que lo requerí, así como por su apoyo muchas veces otorgado u ofrecido aún antes de que yo me animara a solicitárselo.

Al Dr. Gamaliel Blé González, por su amistad, apoyo y paciencia antes, durante y después de la estancia de investigación realizada bajo su dirección, y en la cual realicé la mayor parte de los cálculos correspondientes al capítulo cuatro de esta tesis.

A los Doctores José Luis Estrada López, Alfredo Nicolás Carrizosa, Carlos Ibarra Valdéz, Baltazar Aguirre Hernández y Martha Álvarez Ramírez, por su amistad, por sus consejos y por su apoyo moral y también económico durante los estudios de postgrado y en la etapa final de la tesis. La aportación que ustedes hicieron está reflejada en esta tesis y en mi hogar.

Al Dr. Mario Pineda Ruelas, por animarme en mi camino compartiéndome su propia experiencia como alumno postgraduado y padre de familia, por su comprensión y apoyo durante mi desempeño como Ayudante de Posgrado, así como por haberme ayudado a tener acceso al equipo de cómputo con el que pude continuar el trabajo de tesis.

Al Dr. Oswaldo González Gaxiola, por su honestidad, sus consejos y brindarme su confianza, así como por su amistad y sencillez de trato con la que siempre se dirigió conmigo.

A Marco Ricardo Téllez Cabrera y a Raúl Israel Díaz Salazar por amistad y consejos, así como por haberme tenido confianza y dado la oportunidad de participar con ellos en su experiencia docente.

A mis compañeros y amigos tanto de la maestría como del postgrado en general, Mauricio Gustavo Gil Gutiérrez y su esposa Berenice Guadarrama, Luis Enrique Guerrero Cisneros, Carlos Arturo Loredo Villalobos, Luis Carlos Pérez Ruiz, David Antonio Mejía Suárez, Maximino Cruz Martínez, Javier Zúñiga, Elsa Báez Juárez, Paulo Sergio García Méndez, Marco Ricardo Téllez Cabrera, Claudia Estela Ortiz de Dios, Marco Antonio Rojo Gutiérrez, Juan Carlos Vázquez Almaráz, Gerardo del Muro, Gerardo Ramírez Rosario y Fabián David

Martínez Valdez; por su amistad, apoyo continuo y permitirme compartir con ellos la experiencia del postgrado en matemáticas.

A mis amigos de la licenciatura en Matemáticas y de la maestría en Matemáticas Aplicadas en Tabasco: Heber, Marcos, Rodolfo, Malaquías, Mario y Óscar, por su amabilidad y amistad durante mi estancia en el marco del programa ECOES, haciendo de ella una experiencia muy grata de manera que me facilitó el trabajo a realizar.

A Miguel Ángel Morales Cabrera y Ricardo Morales Rodríguez por ser como hermanos conmigo todo el tiempo que coincidimos en la UAM–I y también después; en particular, porque con ustedes empecé a salir de la soledad y tristeza en la que me encontraba antes de la maestría y me introdujeron en la convivencia cotidiana de la UAM–I, mucho antes de ser bendecido con todas las personas que aquí menciono.

Les agradezco a todos los aquí citados por su amistad, por su paciencia conmigo, por su perdón cuando cometí errores y por su ayuda a mi causa y la de mi gente, cuando en realidad no estaban obligados a hacerlo pero de todas formas me recibieron y estuvieron conmigo. He sido afortunado al entrar en mayor o menor medida en sus vidas y sinceramente deseo que el mismo efecto positivo que tuvieron en mí, yo también pueda tenerlo en otras personas y en ustedes mismos. Muchas gracias.

INDICE

RESUMEN.

En el primer capítulo hacemos un repaso de las estrategias empleadas en la modelación del crecimiento económico: iniciamos abordando el método pionero utilizado por Robert Solow y Trevor Swan para describir la dinámica del crecimiento, seguido del enfoque de Ramsey–Cass–Koopmans con agentes maximizadores del bienestar, para finalmante introducir de manera breve la corriente teórica agrupada bajo la denominación de modelos de crecimiento endógeno.
En el segundo capitulo de esta tesis, se analiza el efecto de relajar el supuesto de crecimiento malthusiano en el comportamiento de la fuerza laboral; en concreto se abordan tres modificaciones: la inclusión de efectos de migración laboral y de dinámica poblacional de tipo logístico, así como la combinación de ambos. Se presentan resultados inéditos en torno a la trayectoria temporal completa del crecimiento y se verifican los estados estacionarios reportados en la literatura.
En el capitulo tres, en el marco del enfoque de Solow–Swan, hacemos una modificación al modelo de Nelson–Phelps de difusión tecnológica para probar de qué forma el apoyo gubernamental a la ciencia y tecnología puede dar lugar al rebase tecnológico por parte de un país rezagado respecto de un país líder.
En el cuarto capítulo, revisamos algunos de los enfoques para estudiar el efecto de la informalidad en el marco de la teoría del crecimiento, a continuación modificamos un planteamiento de W. Easterly, para analizar los efectos del sector informal en una función de bienestar social típica. Específicamente, encontramos que hay un mínimo bienestar social asociado a una economía informal no nula.
En la sección de conclusiones, terminamos esta tesis con una revisión de los alcances y limitaciones de los avances aquí descritos.

Capítulo 1.
La Modelación del Crecimiento Económico.

La teoría del crecimiento económico es una de las ramas más dinámicas y vigentes de la profesión económica. Identificar los determinantes del crecimiento de una economía y a partir de ello, hacer propuestas de política económica que estimulen tal crecimiento, es una de las áreas de mayor interés de la macroeconomía. La matematización relativamente reciente de esta disciplina ha permitido abordar con mayor formalismo el acervo conceptual que ya se tenía y generar nuevo conocimiento. En este primer capítulo hacemos una introducción a la utilización de las herramientas matemáticas que se emplean para analizar el crecimiento y el rezago económico de las naciones, área de trabajo que se ha enriquecido como uno de los campos más activos de la matemática aplicada.

1.1. INTRODUCCIÓN.

¿Ha oído hablar del "espectacular crecimiento" de la economía china? ¿y del estancamiento de la economía mexicana durante los años ochenta? ¿de que Estados Unidos está en desaceleración y del exitoso desempeño de los llamados tigres asiáticos (Corea del Sur, Hong Kong, Singapur, Malasia, etc.) hasta hace muy poco tiempo? Todo esto se aborda en lo que se llama estudio del crecimiento económico, una rama de la ciencia económica cuyo objetivo principal reside en ofrecer respuestas a la siguiente pregunta central ¿por qué unos países son ricos y otros son pobres? La importancia de esta disciplina es obvia y reside en su posible impacto en el bienestar de la sociedad. Otras cuestiones que también se abordan son ¿cuál es el motor del crecimiento económico? ¿cómo es que se presentan milagros del crecimiento, como Japón después de la Segunda Guerra Mundial luego Corea del Sur o China más recientemente? Estas preguntas son muy atractivas y, como lo indica Robert Lucas, Nobel de Economía en 1997, al afirmar que "una vez que se comienza a pensar en ellas es difícil pensar en cualquier otra cosa" (Lucas, 1988, p. 5).

Para empezar, se habla de crecimiento económico en términos de cuánto está creciendo la producción de un país respecto a un período anterior. Esto es, si multiplicamos el precio de cada mercancía por la cantidad que de ésta se produjo, entonces lo que tenemos es el ingreso asociado a la producción de tal bien o mercancía. Si repetimos este proceso para el resto de las mercancías y además hacemos la suma de todos los ingresos por cada bien producido, tendremos como agregado la producción (o ingreso) nacional, cuyo valor se puede comparar con el obtenido en otro período.[1] La variación positiva o negativa de un período a otro determinará si hubo un crecimiento neto de la economía en virtud de una mayor producción, o bien hubo una contracción. Así, cuando se escucha en los noticieros y se lee en los periódicos que China crece al 10% anual, estamos hablando de un crecimiento espectacular, que puede traducirse en un gran bienestar para los habitantes de ese país y de ahí su relevancia. Esto es así por un hecho económico fundamental: el nivel de bienestar de un país depende de su capacidad para producir bienes y servicios; si la producción crece, hay mayor ingreso y en la medida que la distribución del ingreso sea apropiada, la población gozará de mayor bienestar producto del incremento en el ingreso.

[1] Se aclara sin embargo, que el valor de la producción vía ingresos reales debe ajustarse con respecto a un año base.

Bien, resulta que el crecimiento económico como disciplina "matematizada" tiene alrededor de 50 años. En este tiempo puede decirse que se ha transitado por cuatro etapas: una etapa inicial donde la identificación y tratamiento cualitativo de las variables fue la norma, hasta que dio inicio un segundo período donde se empieza a introducir el enfoque de sistemas dinámicos y la teoría del control óptimo, seguida por un estancamiento conceptual (iniciado a fines de los sesenta y finalizado a principios de los ochenta) en el que hubo una matematización creciente de los estudios del crecimiento pero no se aportaba mayor entendimiento conceptual del fenómeno. Finalmente, en el período que vivimos actualmente, se dio paso a la más reciente y claramente efervescente etapa (a partir de la segunda mitad de los años ochenta), en la cual la teoría del crecimiento tuvo una fuerte revitalización académica en base a los llamados modelos de crecimiento endógeno.
En este primer capítulo revisaremos con cierto detalle modelos representativos de estas etapas en la teoría del crecimiento económico.

1.2. LOS HECHOS DEL CRECIMIENTO.

La fuente de evidencia empírica para esta área de estudio es, obviamente, el mundo y las naciones que lo integran. Así, del comportamiento que las economías nacionales muestran, han podido extraerse una serie de hechos y estadísticas sobre el crecimiento que los modelos tratan de explicar. Siguiendo a Jones (1998) y Snowdon et al (2005), algunos de estos hechos son:
1. La variación en el ingreso per cápita entre las economías es muy grande. En general, las naciones más pobres poseen ingresos per cápita menores al 5% de los ingresos de los países más ricos.
2. Las tasas de crecimiento económico varían mucho entre países.
3. Las tasas de crecimiento no son necesariamente constantes.
4. Los países pueden pasar de "pobres" a "ricos" y viceversa.
5. Tanto los trabajadores calificados como los no calificados tienden a emigrar de países pobres a naciones ricas.
6. En los países desarrollados, la producción y la cantidad de capital por trabajador, crecen de forma continua.
7. Las tasas de crecimiento de la población están negativamente correlacionadas con el ingreso.[2]
8. Las políticas nacionales afectan el crecimiento económico a largo plazo.
Veamos ahora la propuesta pionera de Solow–Swan para modelar parte de esta evidencia empírica asociada al crecimiento económico, propuesta que es el punto de partida histórico de los trabajos de investigación actuales. En particular, veremos cómo la utilización de supuestos económicos y herramental matemático relativamente sencillos permitieron desarrollar la teoría del crecimiento con un grado no despreciable de parsimonia.

1.3. EL MODELO DE SOLOW–SWAN.

Este modelo surge como una respuesta al enfoque en ese entonces dominante de Harrod–Domar que sugería que el sistema económico capitalista era inherentemente inestable. En particular, Harrod–Domar trataban de argumentar que fenómenos como la gran depresión de

[2] Esto es, los países con mayores ingresos suelen tener menores tasas de natalidad, y viceversa.

1929 eran la norma y no la excepción. Para ello, usaron un enfoque que hacía énfasis en las dificultades del crecimiento económico continuo y que concluía con un dramático escenario en el que sólo bajo una combinación muy improbable entre los parámetros que definen a la economía de una nación, podría darse el deseado crecimiento continuo o sostenido.
Robert Solow y Trevor Swan (de forma independiente), desarrollaron un modelo sencillo en el que mostraban que las consecuencias más relevantes del enfoque Harrod–Domar se debían a la elección apropiada de uno de los supuestos, en particular el referente a la función de producción de la economía; de tal modo que crisis productivas como la de 1929 eran casos especiales más que la regla general. En particular, Solow y Swan mostraron que en el estudio del crecimiento, la característica distintiva es la estabilidad dinámica del sistema económico más que el desastre previsto por Harrod y Domar.
Veamos a continuación los detalles del modelo pionero de Solow–Swan, razón principal por la que a Robert Solow se le otorgó el Nobel de Economía en 1997.

1.3.1. SUPUESTOS. Las consideraciones de partida de Solow–Swan son las siguientes:
I. Se produce un único bien en la economía y el total de la producción (o ingreso) nacional, Y, se dedica al consumo, C, o a la inversión:

$$Y = C + I_B \tag{1}$$

Cabe señalar en este punto que, en Economía, la variable comúnmente utilizada para identificar la producción nacional es el PIB o Producto Interno Bruto.
II. El ahorro es igual a la inversión (bruta):

$$S = I_B \tag{2}$$

III. Los agentes económicos ahorran una fracción constante del ingreso:

$$S = sY \tag{3}$$

donde s es el coeficiente de ahorro[3] y verifica: $0 < s < 1$. Por ende, consumen la fracción restante del ingreso:

$$C = (1 - s) Y \tag{4}$$

IV. La cantidad de producto nacional que se genera, se debe a la combinación de dos factores o insumos productivos: el capital K y la mano de obra L:

$$Y = F(K, L) \tag{5}$$

donde al término $F(K, L)$ se le conoce como función de producción ($F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$).
V. La inversión neta o variación neta del capital está dada por la adquisición de equipo,[4] I_B, menos la depreciación del mismo:

$$I_N = \frac{dK}{dt} = I_B - \delta K \tag{6}$$

[3] También llamado propensión marginal al ahorro.
[4] O simplemente inversión bruta.

tal que δ es la tasa de depreciación del capital $(0 < \delta < 1)$.
VI. La mano de obra sigue un comportamiento malthusiano:

$$L = L_0 e^{nt} \text{ tal que } \frac{\dot{L}}{L} = n \tag{7}$$

con L_0 como la población laboral inicial y n es la tasa de crecimiento de la población $(n > 0)$.
VII. La función de producción es neoclásica, esto es, presenta las siguientes características:
a) Es homogénea de grado uno:

$$F(\tau K, \tau L) = \tau F(K, L) \quad \forall \tau > 0 \tag{8}$$

En términos económicos se dice que hay rendimientos constantes a escala. Por ejemplo, si $\tau = 3$, i.e. si triplicamos las cantidades de capital y de trabajo, la producción también se triplica.
b) Esencialidad de los factores: Si no se utiliza capital o trabajo, no puede haber producción.

$$F(K, L) = F(0, L) = F(K, 0) = 0 \tag{9}$$

c) Es una función dos veces continuamente diferenciable.
d) Respecto a las primeras y segundas derivadas en K y en L, se dice que: los productos marginales son positivos:

$$\tfrac{\partial F}{\partial K} > 0 \qquad \tfrac{\partial F}{\partial L} > 0 \tag{10}$$

lo cual significa que un incremento en el capital o en el trabajo, generará un aumento en la producción; además verifican productividad marginal decreciente:

$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \qquad \tfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \tag{11}$$

esto quiere decir que los incrementos sucesivos en el capital o en el trabajo, darán lugar a aumentos cada vez menores en la producción.
e) Satisface las llamadas condiciones de Inada:

$$\begin{aligned} \lim_{K\to\infty}\left(\tfrac{\partial F}{\partial K}\right) = 0 \qquad \lim_{K\to 0}\left(\tfrac{\partial F}{\partial K}\right) = \infty \\ \lim_{L\to\infty}\left(\tfrac{\partial F}{\partial L}\right) = 0 \qquad \lim_{L\to 0}\left(\tfrac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty \end{aligned} \tag{12}$$

las cuales implican que las “primeras unidades” de capital y trabajo son altamente productivas, pero que cuando el capital y el trabajo son suficientemente abundantes, entonces sus productos marginales son cercanos a cero. La Figura 1.1, muestra la forma típica de una función de producción que cumple estas condiciones de Inada.

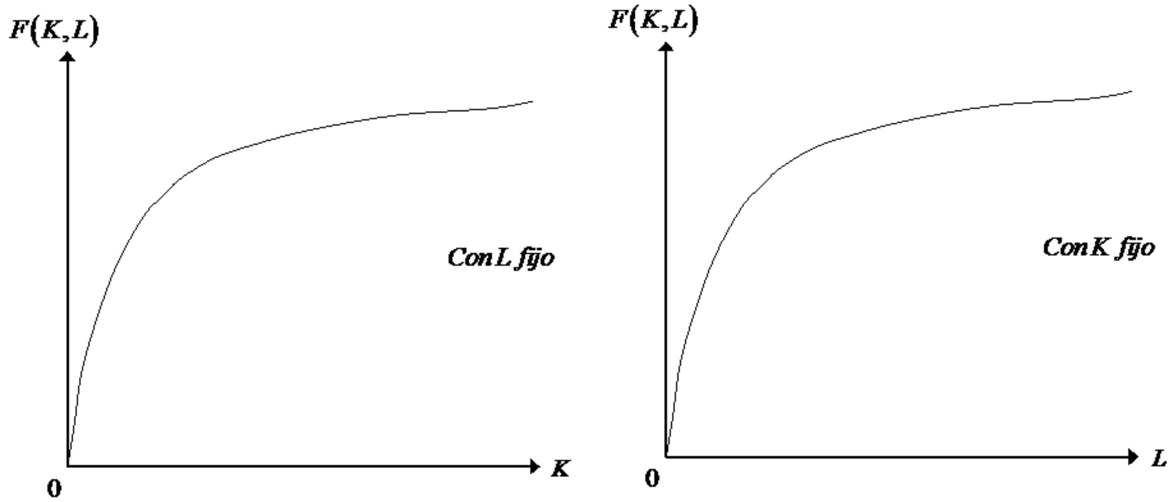

Figura 1.1. Forma general de las funciones de producción neoclásicas.

1.3.2. VARIABLES PER CÁPITA. Si bien es cierto que trabajar con las variables agregadas Y, K, L es importante, en la práctica lo más frecuente es emplear variables referidas a la población (económicamente activa), esto es, variables definidas como un promedio por persona o per cápita. En este sentido, por el supuesto VIIa, podemos trabajar con la siguiente función de producción per cápita (i.e. producción por persona o por trabajador):

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \tag{13}$$

Sean $y = Y/L$, $k = K/L$, la producción per cápita y el capital también per cápita, respectivamente. Con esto, podemos reescribir (13) como sigue:

$$y = f(k) \tag{14}$$

Así, parte de los supuestos anteriores ahora se reexpresan:

$$c = (1 - s)\, y \tag*{(4')}$$

$$f(0) = 0 \tag*{(9')}$$

$$f'(k) > 0 \tag*{(10')}$$

$$f''(k) < 0 \tag*{(11')}$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty \qquad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0 \tag*{(12')}$$

1.3.3. LA DINÁMICA DEL MODELO. Con las premisas bien establecidas, veamos ahora sus consecuencias en la descripción del crecimiento económico.

PROPOSICIÓN 1.1. (Ecuación Fundamental) Si la economía cumple con los supuestos I–VII, entonces la dinámica de acumulación del capital por trabajador está gobernada por:

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \tag{15}$$

Demostración. Sustituyendo (2) y (3) en (6), podemos escribir (6) en los siguientes términos:

$$\dot{K} = I_B - \delta K = sY - \delta K \tag{16}$$

Como $k = K/L$, por propiedades logarítmicas es cierto que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{17}$$

Sustituyendo (16) en (17):

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY - \delta K}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{18}$$

Haciendo uso del supuesto VI y simplificando:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{Y}{K} - \delta - n = s\frac{y}{k} - \delta - n \tag{19}$$

Por tanto:

$$\dot{k} = sy - (\delta + n)k = sf(k) - (n+\delta)k \tag{15}$$

expresión que se conoce como la ecuación fundamental de Solow. □

DEFINICIÓN 1.1. Dada la ecuación diferencial autónoma: $\dot{k} = h(k)$, un valor k^* que satisface $h(k^*) = 0$ se llama *punto de equilibrio* o *estado estacionario.*

PROPOSICIÓN 1.2. (Existencia y Unicidad) Si la economía cumple con los supuestos I–VII, entonces existe un único estado estacionario de la tasa capital–trabajo $k^* \in (0, \infty)$ y satisface

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}; \tag{20}$$

además, la producción per cápita está dada por $y^* = f(k^*)$, y el consumo per cápita se expresa: $c^* = (1-s)f(k^*)$.

Demostración. De la ecuación fundamental (15), se tiene que, por la Definición 1.1, algún estado estacionario k^* debe satisfacer

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$

pues $\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$ y cuando $\dot{k} = 0$, tenemos

$$0 = sf(k^*) - (n+\delta)k^* \Rightarrow \frac{n+\delta}{s} = \frac{f(k^*)}{k^*}$$

Para demostrar la existencia de tal k^*, note que a partir de la regla de L'Hopital y de las condiciones de Inada (ecuación (12')), $\lim_{k\to 0}\frac{f(k)}{k}=\infty$ y $\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{k}=0$. Además, por el Supuesto VIIc, $f(k)/k$ es continua, así que por el teorema del valor intermedio existe k^* tal que satisface $\frac{f(k^*)}{k^*}=\frac{n+\delta}{s}$. Para demostrar unicidad, si diferenciamos $f(k)/k$ con respecto a k, se obtiene

$$\frac{\partial\left[f(k)/k\right]}{\partial k}=\frac{kf'(k)-f(k)}{k^2}=-\frac{f(k)-kf'(k)}{k^2}<0$$

ya que

$$f(k)-kf'(k)=\frac{\partial F}{\partial L}$$

y $\frac{\partial F}{\partial L}>0$ por el supuesto VIId. Debido a que $f(k)/k$ es (estrictamente) decreciente en todas partes, entonces sólo puede existir un único valor de k^* que satisface $\frac{f(k^*)}{k^*}=\frac{n+\delta}{s}$. Finalmente, la producción per cápita dada por $y^*=f(k^*)$, y el consumo per cápita $c^*=(1-s)f(k^*)$, se obtienen por (14) y (4') respectivamente. □

DEFINICIÓN 1.2. Sea k^* un punto de equilibrio de la ecuación $\dot{k}=h(k)$. Decimos que k^* es *asintóticamente estable* si $\exists\varepsilon>0$ tal que si k_0 es una condición inicial y $|k_0-k^*|<\varepsilon$, entonces: a) $k(t)$ está definida $\forall t\geq 0$, y b) $\lim_{t\to\infty}k(t)=k^*$; es decir, la solución tiende al punto de equilibrio cuando $t\to\infty$ siempre que el valor inicial esté suficientemente cerca de k^*. Análogamente, decimos que k^* es *asintóticamente inestable* si $\exists\varepsilon>0$ tal que si k_0 es una condición inicial y $|k_0-k^*|<\varepsilon$, entonces: a) $k(t)$ está definida $\forall t\leq 0$, y b) $\lim_{t\to-\infty}k(t)=k^*$.

TEOREMA 1.1. (de la Estabilidad Local por Linealización). Sea k^* un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{k}=h(k)$ donde h es continuamente diferenciable y además $h'(k^*)\neq 0$. Entonces: a) si $h'(k^*)<0\Rightarrow k^*$ es asintóticamente estable; b) si $h'(k^*)>0\Rightarrow k^*$ es asintóticamente inestable.

Demostración. Véase De la Fuente (2000, Capítulo 9, Teorema 3.5). □

Como puede observarse, (14) y (15) son las ecuaciones clave de este modelo, con las que podemos abordar las preguntas importantes del crecimiento económico. Empecemos.

La interpretación económica del formalismo anterior, es la siguiente: En particular, (15) nos dice que las variaciones en el capital se deben a la diferencia entre dos términos. El primero de ellos, $sf(k)$, refleja la cantidad de ahorro disponible para invertir, tal que si se incrementa el ahorro per cápita, entonces habrá mayor acumulación de capital por trabajador (a esto se le llama "profundización del capital" o "inversión efectiva"). El segundo término, $(\delta+n)k$, es la inversión bruta per cápita que se necesita para que la relación $k=K/L$ se mantenga constante, a tasas δ y n dadas (a este término también se le conoce como "inversión de reposición").

Analicemos la dinámica asociada a (15), apoyándonos en la Figura 1.2: Como $f(0)=0$, entonces $sf(k)=(n+\delta)k$ en $k=0$, coordenada que no es de interés económico. Por otro lado, las condiciones de Inada tienen dos implicaciones: una es que en las cercanías de $k=0$, $f'(k)$ es muy grande y por tanto $sf(k)>(n+\delta)k\Rightarrow\dot{k}>0$; la segunda implicación es que $f'(k)$ tiende a cero conforme k va aumentando, de manera que a partir de cierto punto $f'(k)<\delta+n\Rightarrow sf(k)<(n+\delta)k$ por lo cual ambas curvas terminan intersectándose. Finalmente, como $f''(k)<0$, sólo habrá un punto en donde van a cruzarse las curvas de profundización del capital, $sf(k)$, y de inversión de reposición, $(n+\delta)k$. Sea k^* el punto donde se da el cruce, i.e. donde $sf\ (k) = (n+\delta)\, k$ tal que $\dot{k} = 0$. Así, decimos que k^* es el capital en estado estacionario, como puede verse en la Figura 1.2.

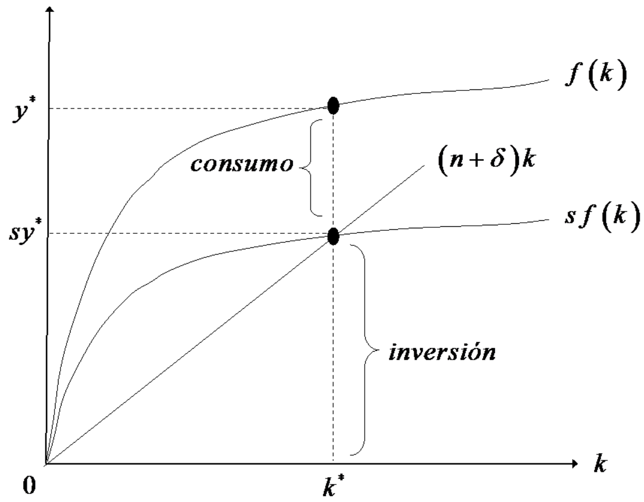

Figura 1.2. El estado estacionario en el modelo de Solow–Swan.

Con esto, podemos resumir la información anterior en un diagrama de fases (Figura 1.3). Si k_0 (el capital per cápita inicial) verifica $k_0 < k^*$, entonces la inversión realizada o profundización del capital $sf\ (k)$ es mayor que la inversión de reposición, así que $\dot{k} > 0$. En caso contrario, si $k_0 > k^*$, entonces $\dot{k} < 0$. Por supuesto si $k_0 = k^*$, se tendrá que $\dot{k} = 0$ y no habrá aumento ni reducción de k. Como puede verse, sea cual sea la posición inicial del capital (excluyendo al origen), la economía aquí considerada convergerá a k^*.

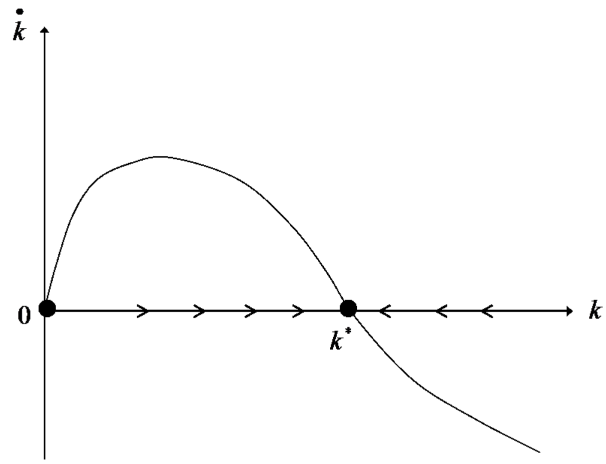

Figura 1.3. Dinámica de la acumulación del capital.

Veamos si el modelo es parsimonioso: de entrada, tiene pocos parámetros pero la cuestión es ver si contiene algunas o varias de las características del mundo real. Hacemos énfasis en que el objetivo es tener un entendimiento de cómo las diferencias entre países en ciertos parámetros se traduce en diferencias en las tasas de crecimiento o en los niveles de producción. En particular, hacer estática comparada es el nombre que recibe en Economía, cuando se desea analizar la respuesta en el crecimiento económico debido a variaciones en los parámetros. Realizaremos esto en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.3 (Estática Comparada). Si la economía cumple con los supuestos I–VII, tal que $k^* = k^*(s, \delta, n)$ sea el estado estacionario de la tasa capital–trabajo y además $y^* = y^*(s, \delta, n)$ sea el estado estacionario de la producción por trabajador (con s, δ, n como parámetros que caracterizan a la economía), entonces

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} > 0, \frac{\partial k^*}{\partial \delta} < 0, \frac{\partial k^*}{\partial n} < 0.$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} > 0, \frac{\partial y^*}{\partial \delta} < 0, \frac{\partial y^*}{\partial n} < 0.$$

Demostración. Ya vimos que

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s} \Leftrightarrow \frac{f(k^*)}{k^*} - \frac{n+\delta}{s} = 0$$

se cumple para un conjunto abierto de valores de k^*. Sea $G(s, \delta, n, k^*) = \frac{f(k^*)}{k^*} - \frac{n+\delta}{s}$. Ahora, podemos aplicar el teorema de la función implícita para obtener los resultados. Por ejemplo

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = -\frac{\partial G/\partial s}{\partial G/\partial k^*} = \frac{(k^*)^2 \ (n+\delta)}{s^2 \left[f(k^*) - kf'(k^*)\right]} > 0$$

donde $f(k) - kf'(k) = \partial F/\partial L > 0$. Los otros resultados se obtienen de manera similar. □

Por tanto, los países con mayores tasas de ahorro tendrán tasas capital–trabajo superiores y serán más ricos. Por otro lado, aquellas economías con mayores tasas de natalidad, tendrán tasas capital–trabajo menores y serán más pobres. La depreciación de la maquinaria y equipo también tiene un efecto negativo. Podemos apreciar mejor estos resultados a partir del siguiente análisis gráfico.

Consideremos que la economía se encuentra en su estado estacionario, k^*. Supongamos que en cierto momento las personas deciden aumentar su tasa de ahorro, pasando de s_1 a s_2 $(0 < s_1 < s_2 < 1)$. Lo primero que ocurre con este incremento es que la curva de inversión realizada $sf(k)$ se desplazará hacia arriba. Con este desplazamiento, la variación de capital ya no es nula, ahora $\dot{k} > 0$. De modo que el capital se incrementará hasta alcanzar un nuevo equilibrio, esto es, la profundización del capital continuará hasta que $s_2 f(k) = (n+\delta)k$, justo en k^{**}. Como $k^{**} > k^* \Rightarrow f(k^{**}) > f(k^*)$, es decir, habrá un nivel de producción per cápita mayor al original: la economía es más rica que antes.

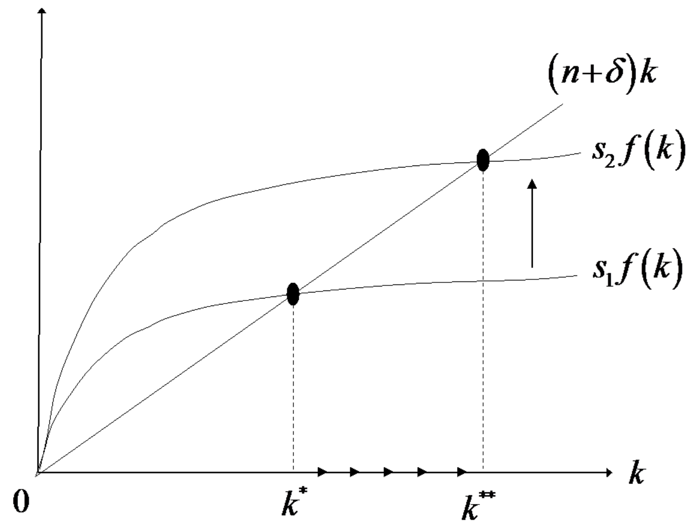

Figura 1.4. Un incremento en la tasa de ahorro.

Abordemos ahora una situación diferente. De nueva cuenta, consideremos una economía en su estado estacionario, k^*. Supongamos que la tasa de natalidad de la fuerza laboral, n_1, experimenta un aumento a n_2 $(0 < n_1 < n_2 < 1)$, debido a –por ejemplo– la llegada de inmigrantes que se reproducen con mayor rapidez que la población nativa. Tras este aumento tenemos que $\dot{k} < 0$, así que el capital per cápita disminuirá continuamente mientras la inversión de reposición $(n_2 + \delta)\, k$, sea mayor que la inversión realizada $sf(k)$. El descenso de k se detendrá en el nuevo punto de equilibrio, k^{**}. Sin embargo, obsérvese que $k^{**} < k^*$ $\Rightarrow f(k^{**}) < f(k^*)$, de manera que el cambio en la tasa de natalidad laboral ha provocado un empobrecimiento de la economía.

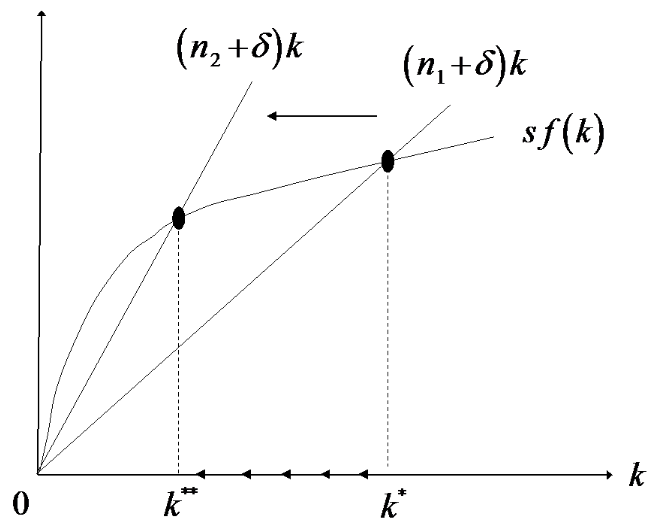

Figura 1.5. Un incremento en la tasa de natalidad.

Hacemos notar que, hasta este momento, hemos hecho abundante referencia a un estado estacionario o equilibrio en el modelo, sin embargo es oportuno mencionar que en realidad,

en Economía, la noción de equilibrio, está asociada tanto al seguimiento de toda una trayectoria temporal por parte de las variables además de valores estáticos como k^*. Enfatizando: el equilibrio económico no sólo se refiere a un punto o valor estático, el equilibrio económico también hace alusión a la trayectoria completa del comportamiento de la economía. Formalizamos lo anterior en la siguiente definición.
DEFINICIÓN 1.3. Para una población inicial $L(0)$ y un capital inicial $K(0)$, decimos que una *trayectoria de equilibrio* (o *senda de crecimiento sostenido*) es una sucesión de mano de obra, capital, producción y consumo $\{L(t), K(t), Y(t), C(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tales que $L(t)$ satisface (7), $K(t)$ satisface (6), $Y(t)$ está dado por (5) y cumple con el supuesto VII, y $C(t)$ se rige por (4).

1.3.4. UNA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN ESPECÍFICA. Una función de producción muy común es la Cobb–Douglas: $F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. Para "ver" la dinámica del crecimiento económico asociada a esta función de producción, conviene hacer notar su forma intensiva: $y = k^{\alpha}$, obtenida como en (13) y (14). Así, la ecuación fundamental (15) queda:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (\delta + n)k \tag{21}$$

cuya *dinámica de transición* viene dada por la solución analítica de (21), esto es:

$$k(t) = \left[\frac{s}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{22}$$

y el estado estacionario correspondiente es:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{23}$$

Además, como $y = k^{\alpha}$, la producción per cápita viene dada por:

$$y(t) = \left[\frac{s}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{24}$$

y en estado estacionario:

$$y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{25}$$

Ahora bien, estos no son los únicos resultados que nos interesan de la utilización de la Cobb–Douglas, un par de temas también de interés son los siguientes: la velocidad de convergencia y el análisis de las tasas de crecimiento, para los cuales resulta muy conveniente la introducción de esta función de producción, como veremos a continuación.

1.3.5. VELOCIDAD DE CONVERGENCIA. En la práctica económica, no sólo son de interés los efectos de un cambio en los parámetros como la tasa de ahorro o la de natalidad, sino también la rapidez con que estos cambios se realizan; claro está que también nos interesa la rapidez con que una economía se mueve hacia su estado estacionario. A esta "rapidez de acercamiento", se le conoce como velocidad de convergencia; y por supuesto, dependerá de

los parámetros estructurales de la economía como son la tasa de ahorro, de natalidad, la depreciación y de la función de producción.
Para abordar esta "velocidad de acercamiento" y por simplicidad, nos enfocaremos en el análisis de k (se tienen los mismos resultados si nos referimos a y, el producto per cápita).
DEFINICIÓN 1.4. La *velocidad de convergencia*, λ, es el cambio en la tasa de crecimiento cuando el capital aumenta en uno por ciento, y matemáticamente se expresa:

$$\lambda = -\frac{\partial\left(\dot{k}/k\right)}{\partial \ln k} = -\frac{d\dot{k}}{dk} \tag{26}$$

PROPOSICIÓN 1.4. (Convergencia). En una economía definida por los supuestos I–VII y con una función de producción Cobb–Douglas, la velocidad de convergencia está dada por:

$$\lambda = (1-\alpha)(n+\delta) \ \text{ anual} \tag{27}$$

Demostración. El objetivo es calcular con qué rapidez k se acerca a k^*, para lo cual retomaremos la ecuación fundamental del modelo:

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \tag{15}$$

Como puede verse, por (15) se puede escribir: $\dot{k} = \dot{k}(k)$, y cuando $k = k^*$, $\dot{k} = 0$ (excluyendo el origen). Por tanto, la aproximación de Taylor de orden uno de $\dot{k}(k)$ en una vecindad de $k = k^*$, se puede escribir

$$\dot{k} \simeq \left[\left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\right)_{k=k^*}\right](k-k^*) \tag{28}$$

Si renombramos al término de la derivada como $-\lambda$, entonces se tiene que

$$\dot{k}(t) \simeq -\lambda\left[k(t) - k^*\right] \tag{29}$$

Observemos que $\lambda > 0$, pues $\dot{k} > 0$ cuando $k < k^*$ y $\dot{k} < 0$ cuando $k > k^*$. Así, la expresión (29) indica que en la vecindad del estado estacionario, k se aproxima a k^* a una velocidad proporcional a la distancia que le separa de k^*. Con esto, la tasa de crecimiento de $[k(t) - k^*]$ se puede asumir como constante e igual a $-\lambda$. A su vez, esto implica que

$$k(t) - k^* \simeq e^{-\lambda t}\left[k_0 - k^*\right] \tag{30}$$

con $k(0) = k_0$ como el valor inicial del capital por trabajador. Sin embargo, debe enfatizarse que (30) se obtuvo tomando en cuenta que el sistema económico es estable (en el largo plazo, cuando $t \to \infty$, k converge a k^*), y por otro lado, haciendo uso de la linealización de $\dot{k}$ (i.e. de la ecuación (15)) en una vecindad de $k = k^*$.
Realicemos ahora el cálculo de λ:

$$\lambda = -\left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\right)_{k=k^*} = -\left[sf'(k) - (n+\delta)\right]_{k=k^*} \tag{31}$$

Sin pérdida de generalidad, si asumimos que la función de producción es Cobb–Douglas: $f(k) = k^{\alpha} \Rightarrow f'(k) = \alpha k^{-(1-\alpha)}$, y en el punto de equilibrio:

$$f'(k^*) = \alpha \frac{n+\delta}{s} \tag{32}$$

pues $k^* = (s/(n+\delta))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ por (23). Sustituyendo (32) en (31), podemos concluir que

$$\lambda = (1-\alpha)(n+\delta) \tag{27}$$

Por tanto, k recorre la senda de crecimiento sostenido como ya hemos visto, y al final converge al estado estacionario a una velocidad dada por $(1-\alpha)(n+\delta)$, que era lo que se quería demostrar. □

PROPOSICIÓN 1.5. Para una economía definida como en la Proposición 1.4, el tiempo requerido para alcanzar la mitad de su valor en estado estacionario será aproximadamente igual a:

$$t_{\frac{1}{2}} \simeq \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{33}$$

donde λ es la velocidad de convergencia.

Demostración. Si se parte de un k_0 dado, y se alcanza la mitad de k^*, el capital de la economía está dado por

$$k(t) = \frac{k_0 + k^*}{2} \tag{34}$$

Sustituyendo (34) en (30), tenemos:

$$\frac{1}{2} \simeq e^{-\lambda t} \tag{35}$$

Así, tomando logaritmos y despejando t, obtenemos la expresión (33). □

Veamos un ejemplo de lo anterior. Consideremos una economía donde $n + \delta = 4$ %, y si tomamos en cuenta que en la mayor parte de los países $\alpha = 1/3$ (según Romer, 2002), entonces k recorre cada año un 2.67 % de la distancia que le separa de k^*, pues $\lambda = (2/3)(0.04) = 0.0267$; además, tardará unos 26 años en alcanzar la mitad de su valor en estado estacionario, ya que

$$t_{\frac{1}{2}} \simeq \frac{\ln 2}{0.0267} = 26 \text{ años.}$$

con lo cual, podemos decir que la convergencia hacia el punto de equilibrio es relativamente lenta. Supongamos ahora que, finalmente, la economía en cuestión ha alcanzado su estado estacionario. Entonces se presenta un cambio en la tasa de ahorro incrementándose en un 10 % (por ejemplo, de un 15 % a un 16.5 %). Como ya vimos en la sección de Estática Comparada, esta variación en el ahorro provocará que la economía cambie su trayectoria a un nuevo estado estacionario $y^{**} > y^*$. La pregunta es, ¿a qué velocidad se da este cambio? Para ello, haremos uso de la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{y^*/s} = \frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

cuya obtención puede seguirse en Romer (p. 19) y que indica el porcentaje en que y^* varía cuando s se incrementa un 1 %. De esta manera, si $\alpha = 1/3$, tenemos que $\varepsilon_{y^*/s} = 0.5$ %.

Esto es, ante el incremento de s en un 10 % como en el ejemplo que contemplamos aquí, y^* subirá sólo un 5 % de su valor original. ¿Qué nos puede decir λ respecto a la rapidez con la que se produce este cambio en y^*? Bien, como $\lambda = 0.0267$, entonces después del primer año y^* valdrá un $(0.0267)(5\ \%) = 0.1335\ \%$ más que su valor original, después de 26 años valdrá un $(0.5)(5\ \%) = 2.5\ \%$ más que el estado estacionario inicial, y finalmente tendería de forma asintótica a situarse un 5 % por encima de su valor original.

Tabla 1. Aproximación a un nuevo estado estacionario tras un incremento en la tasa de ahorro.

Años transcurridos	$\Delta y = \frac{y - y^*}{y^*} \times 100\%$	$y(t)$
$t = 1$	0.1335 %	$1.001335\, y^*$
$t = 26$	2.5 %	$1.025\, y^*$
$t \to \infty$	5.0 %	$1.05\, y^* = y^{**}$

Podemos ver entonces que el efecto de una variación sustancial en la tasa de ahorro es relativamente modesto, pero además de eso tarda bastante tiempo en producirse.
En realidad, la convergencia no se refiere solamente a la rapidez de acercamiento de la economía a su estado estacionario, la idea de convergencia se relaciona también con la posibilidad de que los países con iguales tasas de ahorro y de natalidad (y con acceso a la misma tecnología como veremos más adelante), pero con diferentes niveles iniciales de producción o capital (y_0, k_0), acabarán teniendo idénticos niveles de ingreso, es decir, convergerán. Las implicaciones de este argumento son relevantes, pues los países que hoy sean pobres, si tienen parámetros estructurales idénticos a los de las naciones ricas, terminarán alcanzándolas. Esto se conoce como convergencia absoluta.

1.4. EJEMPLO: México y Chile.

Es bien sabido que dos de las economías más importantes en latinoamérica son la mexicana y la chilena. Sabemos también que aunque México redujo su tasa de natalidad en los últimos años, de hecho ha aumentado su población con rapidez en los últimos 60 años (más o menos al término de la Revolución, para ser más precisos). También es un hecho bien conocido que por idiosincrasia o cultura popular, la sociedad mexicana tiene bajos niveles de ahorro. Trataremos de modelar estos indicadores y analizar sus implicaciones en el crecimiento (utilizaremos datos reales tomados de Jones, apéndice B, 1998, excepto el referente a la depreciación δ). Consideremos dos economías A y B (A=México y B=Chile), con una misma función de producción: $Y = K^{0.4}L^{0.6}$ para indicar que la planta industrial de ambas naciones no difiere significativamente. Durante el período que va de 1960 a 1990, las tasas

de ahorro de dichas economías son $s_A = 16$ % y $s_B = 21$ %; las tasas de natalidad son $n_A = 2$ % y $n_B = 1.7$ %. El capital se deprecia a una misma tasa en ambas naciones: $\delta_A = \delta_B = 4$ % $= \delta$. Asumiremos que las condiciones iniciales L_0, k_0, y_0 son las mismas para los dos países. Sigamos este plan de trabajo: a) obtener el ingreso per cápita en estado estacionario para ambas economías, b) determinar las sendas de crecimiento sostenido de México y Chile, c) ¿qué sugerencias de política económica pueden hacerse para que la economía de menor crecimiento iguale a la otra?, d)¿hay convergencia o divergencia en los países bajo estudio?
Veamos el primer inciso de nuestro plan de trabajo. Para la economía mexicana la ecuación fundamental es:

$$\dot{k}_A = s_A y_A - (\delta + n_A) k_A = s_A k_A^{\alpha} - (\delta + n_A) k_A$$

$$\dot{k}_A = 0.16 k_A^{0.4} - (0.04 + 0.02) k_A = 0.16 k_A^{0.4} - 0.06 k_A$$

En estado estacionario: $\dot{k} = 0$. Por tanto

$$0.16 k_A^{0.4} = 0.06 k_A \Rightarrow k_A^* = 5.12 \text{ unidades de capital por trabajador}$$

y como $y_A = k_A^{0.4}$, entonces $y_A^* = 1.92$ unidades de producto por trabajador. Análogamente para la economía chilena:

$$\dot{k}_B = 0.21 k_B^{0.4} - 0.057 k_B$$

$$k_B^* = 8.78 \text{ unidades de capital por trabajador}$$

$$y_B^* = 2.38 \text{ unidades de producto por trabajador}$$

Como puede verse, la economía chilena tiene un estado estacionario de mayor riqueza, en comparación con el punto de equilibrio correspondiente a México.
Respecto al segundo inciso, sabemos que la senda de crecimiento sostenido está determinada por la solución analítica de la ecuación fundamental, de forma que si sustituimos $y = f(k) = k^{0.4}$ en (15), y hacemos uso de los parámetros asociados a cada economía, podremos obtener las trayectorias que buscamos. De hecho, como la función de producción es de tipo Cobb–Douglas, la solución analítica está dada por (22). Así, la senda de crecimiento sostenido de México es:

$$k_A(t) = \left[\frac{8}{3} + \left(k_{0_A}^{0.6} - \frac{8}{3}\right) e^{-0.036t}\right]^{\frac{5}{3}}$$

Para Chile, la trayectoria de equilibrio es la siguiente:

$$k_B(t) = \left[3.68 + \left(k_{0_B}^{0.6} - 3.68\right) e^{-0.0342t}\right]^{\frac{5}{3}}$$

En la Figura 1.6, se tiene la representación gráfica de ambas sendas de crecimiento asumiendo que $k_{0_A} = k_{0_B} = 1$ (en realidad, también puede graficarse la trayectoria de equilibrio a partir de $y(t)$, pero como $y(t)$ se deriva directamente de $k(t)$, es suficiente con trazar el comportamiento del capital por trabajador).

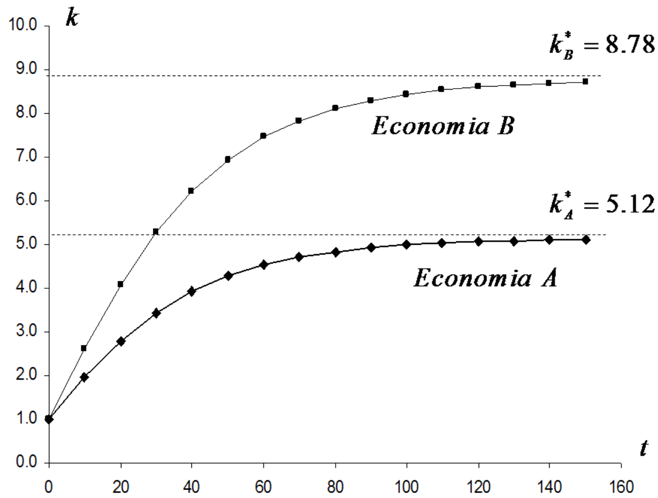

Figura 1.6. Trayectorias de equilibrio para las economías hipotéticas con datos de Chile (B) y México (A).

De la Figura 1.6, puede verse que ambas economías parten de un idéntico nivel de capital, k_0, pero como la economía B (que aquí hemos identificado como Chile) ahorra más y tiene una población que crece a una tasa menor respecto a la economía A (México), entonces el grado de capitalización de B crece en mayor proporción y converge a un nivel de ingreso también mayor. A largo plazo (i.e. cuando $t \rightarrow \infty$), $k_A^* < k_B^*$, como ya calculamos en la sección anterior.

Para atender el tercer inciso lo que debemos hacer es considerar cuáles son las medidas de política económica que propiciarán que A mejore su desempeño respecto a B. Para que esto ocurra, las medidas a tomar habrán de afectar los parámetros n, δ y s. El parámetro más importante es la propensión a ahorrar, s_A, que puede modificarse a la alza si el gobierno incentiva adecuadamente a los individuos (promoviendo tasas de interés más altas para los ahorradores). Por otro lado, la depreciación de capital, δ_A, es muy difícil de alterar y obedece más bien a las características físicas de la maquinaria. En todo caso, la maquinaria y equipo pueden conservarse mejor si hay una política de mantenimiento industrial que retrase la depreciación y permita ampliar el uso del equipo, pero es complejo coordinar un esquema tal. En cambio, la tasa de natalidad sí es más manejable aunque no en el corto plazo. Una política de reducción demográfica del tipo "pocos hijos para vivir mejor" (que se empleó ampliamente a partir de los 70's en México) puede ser efectiva para disminuir n_A, pero su efecto no se aprecia de forma inmediata, más bien, por decir algo, tras unas dos décadas (nótese que lo contrario ocurre con variaciones en la tasa de ahorro, cuyo efecto es más inmediato).

Finalmente, en el inciso d) tenemos que para la convergencia se presente entre estos dos países, sus parámetros estructurales deben ser similares de manera que las economías sólo difieran en sus respectivos capitales iniciales. Esto no ocurre así, y como podemos apreciar en la Figura 1.6, estos países convergen a estados estacionarios distintos, esto es, divergen.

1.5. TASA DE CRECIMIENTO Y TECNOLOGÍA.

El Largo Plazo. La dinámica analizada hasta este momento aborda la interacción entre las variables económicas y su evolución temporal haciendo hincapié en el estado estacionario y cómo los parámetros lo afectan. No obstante, al hacer recomendaciones de política económica a los gobiernos o al tomar decisiones de política pública, no se trabaja en base a los datos absolutos, i.e. a los valores en estado estacionario del PIB real, sino a la tasa de crecimiento que esta variable experimenta. Así, en los noticieros y periódicos escuchamos y leemos comentarios en torno a tasas de crecimiento anual del 10 % en China o del 2 % en México, pero en ningún caso se hará referencia a los estados estacionarios de las economías nacionales. Esto es así, porque no es tan importante conocer cuál es el valor del PIB per cápita en estado estacionario del país, pero sí es importante (y mucho) saber si estamos creciendo a tasas suficientes para alcanzarlo (y hacer que se mantengan esas tasas, si son buenas, o se mejoren en caso contrario). En este sentido, ¿qué nos dice el modelo de Solow–Swan respecto a las tasas de crecimiento? Aquí es donde empiezan las dificultades del modelo. Durante la época en que se propuso este enfoque, ya era bien sabido que las naciones industrializadas, así como varias de las semi–industrializadas y las que estaban en vías de serlo, experimentaban tasas de crecimiento positivas, de manera que este hecho debería ser reproducido por el modelo. Sin embargo, no era así. En la versión original, el modelo pronosticaba que en el largo plazo, cuando $t \to \infty$, el PIB per cápita –y las demás variables per cápita–, dejarían de crecer para llegar a un estancamiento total. Esto era un grave fallo, pero la conclusión era inevitable a partir de los supuestos.

PROPOSICIÓN 1.6 (Tasas de Crecimiento en Estado Estacionario). Para una economía definida como en la Proposición 1.4, en el estado estacionario las variables agregadas Y, K y C, crecen a la misma tasa de la fuerza laboral, n; mientras que las variables per cápita y, k y c, tienen una tasa de crecimiento nula.

Demostración. Sabemos que $k = K/L$, de forma que por propiedades logarítmicas es cierto que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{17}$$

Como en estado estacionario, $\dot{k} = 0$, entonces:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} \tag{36}$$

Por el supuesto VI, se tiene que la mano de obra sigue un comportamiento malthusiano, i.e. $\dot{L}/L = n$, por tanto $\dot{K}/K = n$, también. Análogamente, como $y = Y/L \Rightarrow \dot{y}/y = \dot{Y}/Y - \dot{L}/L$. Además, debido a que $\dot{y} = 0$ en el punto de equilibrio, entonces $\dot{Y}/Y = \dot{L}/L = n$. El procedimiento es el mismo para el consumo agregado, haciendo uso de la relación $c = C/L$. Respecto a las variables per cápita, como en el estado estacionario se cumple que $\dot{k} = \dot{y} = \dot{c} = 0$, entonces las tasas de crecimiento asociadas serán nulas. □

Como puede verse, la conclusión natural de crecimiento nulo no podía evitarse; la gravedad del asunto estaba en que con esa predicción en el crecimiento, no se podían hacer sugerencias de políticas públicas efectivas, pues se hiciera lo que se hiciera, al final la tasa de crecimiento sería cero. La cuestión ahora era si podía hacerse algo al respecto. La respuesta llegó del mismo Solow y fue la siguiente: debe incluirse a la tecnología también como "generadora" del crecimiento. Lo que Solow propuso fue modificar la función de producción a través del supuesto de que el avance tecnológico se genera a una tasa constante ($\dot{A}/A = g$) y tiene un efecto aumentador de la eficiencia de la mano de obra más que del capital, lo que en términos económicos se escribe: $F(K, AL)$. Antes de continuar, será pertinente aclarar lo que significa "avance tecnológico aumentador de la eficiencia laboral": como A mejora con el paso del tiempo, una unidad de trabajo L será más eficiente o productiva pues el efecto de L está aumentado por la mejora de A. Así, en términos del modelo manejado hasta aquí, la consideración del avance tecnológico introduce las siguientes modificaciones:

Supuesto IV. La producción se genera por la combinación de tres factores o insumos productivos: el capital K, la mano de obra L y el progreso técnico A:

$$Y = F(K, AL) \tag{37}$$

donde por $F(K, AL)$ se denota a la función de producción ($F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$).

Supuesto VII. La función de producción sigue siendo neoclásica. Por ejemplo,

a) Es homogénea de grado uno:

$$F(\tau K, \tau AL) = \tau F(K, AL) \quad \forall \tau > 0 \tag{38}$$

La verificación de los restantes incisos b)–e) se da sustituyendo AL como argumento en lugar de L, v.gr.: $\partial F / \partial (AL) > 0$ en vez de $\partial F / \partial L > 0$.

Supuesto VIII. El avance tecnológico o progreso técnico A, se reproduce de forma proporcional a la tecnología presente:

$$A = A_0 e^{gt} \text{ tal que } \frac{\dot{A}}{A} = g \tag{39}$$

con A_0 como la tecnología inicial y siendo g la tasa de crecimiento correspondiente ($g > 0$). En adición a las variables per cápita definidas por (14), (4') y las ecuaciones (9') a (12'), ahora también emplearemos variables definidas en términos de unidades eficientes de trabajo, como sigue:

$$\frac{Y}{AL} = \frac{F(K, AL)}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \tag{40}$$

Sean $\tilde{y} = Y/AL$, $\tilde{k} = K/AL$, la producción y el capital referido a estas nuevas unidades eficientes, respectivamente. De esta manera, podemos reescribir (40) como sigue:

$$\tilde{y} = f\left(\tilde{k}\right) \tag{41}$$

Por tanto, también podemos decir que:

$$\tilde{c} = (1 - s)\, \tilde{y} \tag{4”}$$

$$f(0) = 0 \tag{9”}$$

$$f'\left(\tilde{k}\right) > 0 \tag{10”}$$

$$f''\left(\tilde{k}\right) < 0 \tag{11"}$$

$$\lim_{\tilde{k}\to 0} f'\left(\tilde{k}\right) = \infty \qquad \lim_{\tilde{k}\to \infty} f'\left(\tilde{k}\right) = 0 \tag{12"}$$

Es pertinente mencionar que aún con la modificación introducida, se matienen las conclusiones generales que hemos desarrollado en páginas anteriores. No lo abordaremos aquí, pero puede demostrarse la existencia, unicidad y estabilidad de un estado estacionario, con una filosofía análoga a la que ya hemos empleado.[5] Por ejemplo, la ecuación fundamental modificada resulta:

$$\dot{\tilde{k}} = sf\left(\tilde{k}\right) - (n+\delta+g)\,\tilde{k} \tag{42}$$

Y si la función de producción es Cobb–Douglas, $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \iff \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$, el punto de equilibrio del PIB en unidades laborales eficientes viene dado por:

$$\tilde{y}(t) = \left[\frac{s}{n+\delta+g} + \left(\tilde{k}_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta+g}\right) e^{-(1-\alpha)(n+\delta+g)t}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{43}$$

y en estado estacionario:

$$\tilde{y}^{*} = \left(\frac{s}{n+\delta+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{44}$$

Para mayores detalles, sugerimos las presentaciones de Romer (2000, p. 4–22) y Barro et al (2004, p. 3–29).

PROPOSICIÓN 1.7. (Tecnología y Tasas de Crecimiento en Estado Estacionario). Sea una economía definida como en la Proposición 1.4 pero con las modificaciones pertinentes por la incorporación del progreso técnico (ecuaciones (37)–(41), (4') y de la (9') a la (12'), inclusive). En el estado estacionario, las variables agregadas Y, K y C, crecen a una tasa $n+g$; las variables per cápita y, k y c, crecen a la misma tasa del progreso técnico, g; finalmente, las variables en unidades eficientes de trabajo $\tilde{y}$, $\tilde{k}$ y $\tilde{c}$, tienen una tasa de crecimiento nula.

Demostración. La prueba es análoga a la de la Proposición 1.6. Veamos, por definición $\tilde{k} = K/AL$, así que de nueva cuenta, por propiedades logarítmicas se cumple lo siguiente:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \left(\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A}\right) \tag{45}$$

En estado estacionario, $\dot{\tilde{k}} = 0$, entonces:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A} \tag{46}$$

Por los supuestos VI y VIII, se tiene que la mano de obra aumenta exponencialmente y la tecnología progresa a una tasa constante g, i.e. $\dot{L}/L = n$ y $\dot{A}/A = g$, por tanto $\dot{K}/K =$

[5] Véase Acemoglu (2009).

$n+g$. El procedimiento es similar para C e Y, notando que $\dot{\tilde{y}}/y = \dot{Y}/Y - \left(\dot{L}/L + \dot{A}/A\right)$, $\dot{\tilde{c}}/c = \dot{C}/C - \left(\dot{L}/L + \dot{A}/A\right)$. Por otro lado, en cuanto a las variables per cápita, por ejemplo para el PIB por persona:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = (n+g) - n = g \tag{47}$$

Como puede verse, las otras variables k, c también crecen a la tasa g. Para finalizar, debido a que en el estado estacionario $\dot{\tilde{k}} = \dot{\tilde{y}} = \dot{\tilde{c}} = 0$, entonces las tasas de crecimiento de las variables en unidades eficientes de trabajo serán todas nulas. □
Para mayor claridad, hemos resumido las Proposiciones 1.6 y 1.7 en la siguiente tabla ilustrativa modificada a partir de una versión previa de Barberá et al (2003, p. 87).

Tabla 2. COMPARACIÓN DE LAS TASAS DE CRECIMIENTO DE LAS VARIABLES EN ESTADO ESTACIONARIO.				
Notación		**Variable**	**Modelo sin progreso técnico**	**Modelo con progreso técnico**
Y		Producción agregada	n	$n+g$
K		Capital agregado	n	$n+g$
C		Consumo agregado	n	$n+g$
L		Fuerza laboral del pais	n	n
y	$=\frac{Y}{L}$:	Producción per cápita	0	g
k	$=\frac{K}{L}$:	Capital per cápita	0	g
c	$=\frac{C}{L}$:	Consumo per cápita	0	g
$\tilde{y}$	$=\frac{Y}{AL}$:	Producción en unidades eficientes de trabajo	No está definido	0
$\tilde{k}$	$=\frac{K}{AL}$:	Capital en unidades eficientes de trabajo	No está definido	0
$\tilde{c}$	$=\frac{C}{AL}$:	Consumo en unidades eficientes de trabajo	No está definido	0
A		Progreso técnico o avance tecnológico	No está definido	g

El Corto Plazo. Ahora bien, en los párrafos anteriores dirigimos la atención al largo plazo, pero ¿qué ocurre con las tasas de crecimiento en el corto plazo, i.e. durante la transición al estado estacionario? Como ya vimos, en la primer versión de este modelo, las economías no crecen indefinidamente, pero de hecho sí es posible que haya crecimiento por un tiempo, esto es, durante la transición. Por ejemplo, una economía que comienza con una existencia de capital por trabajador inferior a su valor en estado estacionario, experimentará crecimiento en k y en y, a lo largo de la ruta transición al estado estable. Sin embargo, lo que ocurre despues es que al transcurrir el tiempo el crecimiento disminuye rápidamente según la economía se acerca a su estado estable, y llega el momento en que el crecimiento se detiene por completo, como ya hemos visto. Para ver que el crecimiento disminuye a lo largo de la ruta de transición, observemos que a partir de (15) podemos definir la tasa de crecimiento del capital como sigue

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma_k = sk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta) \tag{48}$$

para una función de producción a la Cobb–Douglas. Observe que el término $sk^{-(1-\alpha)}$ es decreciente y verifica

$$\lim_{k\to 0}\ sk^{-(1-\alpha)} = \infty \qquad \lim_{k\to\infty}\ sk^{-(1-\alpha)} = 0$$

como resultado de las propiedades que debe cumplir toda función de producción neoclásica. La transición al estado estacionario está representada gráficamente en la Figura 1.7. Como podemos ver, la diferencia entre las dos curvas nos da la tasa de crecimiento del capital, γ_k. Por tanto, $\gamma_k > 0$ si $k < k^*$, y $\gamma_k < 0$ cuando $k > k^*$. Además, en la medida en que $k_0 \ll k^*$, mayor será la tasa inicial de crecimiento γ_k experimentada; análogamente, tanto más sea que $k_0 \gg k^*$, menor será la tasa inicial de crecimiento γ_k. Al final, conforme la economía se aproxime a k^*, entonces $\gamma_k \to 0$, como ya demostramos en la Proposición 1.6. Así, en tanto la economía se acerca a su estado estacionario, variaciones en el ahorro o en la natalidad sí tendrán efecto en la tasa de crecimiento, pero este efecto será únicamente temporal; por ejemplo, aunque los países que inviertan más tenderán a crecer más deprisa, la influencia de esa mayor inversión en capital será transitoria. Lo que ocurre en todo caso es que los países con mayor inversión tendrán un estado estacionario con ingreso per cápita superior, pero no desarrollarán tasas de crecimiento más altas (en el largo plazo). Como podrá notarse, este argumento sencillo es contrario a la idea de que los incrementos en la inversión generarán tasas de crecimiento sostenidas.

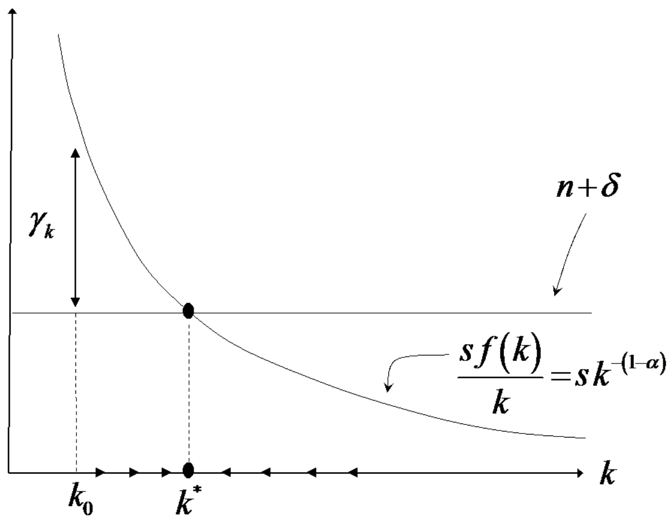

Figura 1.7. Tasa de Crecimiento y Dinámica de Transición.

Terminaremos esta sección insistiendo en la importancia que el progreso tecnológico tiene para el crecimiento. En realidad, una vez visto el comportamiento del crecimiento económico en el corto y en el largo plazo, el lector puede ir notando por qué se considera insistemente a la tecnología como la verdadera fuerza impulsora del crecimiento.

1.6. LA REGLA DE ORO.

El concepto de la Regla de Oro hace referencia a cuál es el nivel de capital por trabajador que maximiza el consumo individual, y por tanto, muestra cuál es la trayectoria de crecimiento que debe mantenerse para alcanzar un bienestar mayor (en el contexto de una sociedad de consumo, se alcanza más bienestar cuanto mayor es el consumo).
El nombre de Regla de Oro acuñado por Edmund Phelps, se debe a que si se alcanza tal capital dorado y se mantiene a la economía en dicha senda (lo cual es perfectamente posible pues la fracción de ahorro y por ende de consumo, es constante), entonces las personas que vivan en un tiempo t, así como los que vivirán después, tendrán acceso al mejor bienestar posible (porque gozarán del mayor consumo del que la economía es capaz), todos ellos por igual. Así, en las Sagradas Escrituras se hace mención de la Regla de Oro bíblica: "tratar a los hombres como quieran ser tratados por ellos" (Evangelio según San Lucas, Capítulo 6, versículo 31), que aplicada a las relaciones de consumo intergeneracionales de la economía viene a ser lo mismo: los individuos de hoy tienen acceso al mejor consumo posible y los del mañana también. La versión matematizada de este concepto se desarrolla a continuación.
De entrada, podríamos pensar que si aumentamos el ahorro, entonces aumenta también la inversión y por lo tanto se incrementa la producción, y al aumentar la producción también se va a incrementar el consumo. Sin embargo, no ocurre así: el hecho de aumentar el ahorro de forma indiscriminada no necesariamente irá acompañado de una subida en el consumo. Por ejemplo, en el modelo de Solow–Swan sin progreso técnico y con función de producción Cobb–Douglas se tiene que, en el largo plazo, el capital y el ingreso por trabajador están dados por (23) y (25):

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

y como el consumo es una fracción fija del ingreso:

$$c^* = (1-s)\, y^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{49}$$

Entonces, a la menor tasa de ahorro posible, $s = 0\ \%$, el capital por trabajador sería nulo y también el ingreso, de manera que no habría consumo: $k^* = 0 \Rightarrow y^* = 0 \Rightarrow c^* = 0$. En el otro extremo, a la máxima tasa de ahorro posible, $s = 100\ \%$, se tiene: $k^* > 0 \Rightarrow y^* > 0 \Rightarrow c^* = 0$. Podemos ver entonces que tiene que haber algún valor de la tasa de ahorro $(0 < s < 1)$, bajo el cual sea máximo el consumo per cápita en estado estacionario.
PROPOSICIÓN 1.8. En una economía que sigue el marco de Solow–Swan, con una función de producción neoclásica general, $f(k)$, el capital por trabajador en estado estacionario que satisface la regla de oro, debe cumplir:

$$f'(k_{oro}) = n + \delta \tag{50}$$

y la tasa de ahorro correspondiente estará dada por:

$$s_{oro} = \frac{k_{oro} \cdot f'(k_{oro})}{f(k_{oro})} \tag{51}$$

Demostración. Antes de empezar, notamos que se hará el análisis sin progreso técnico, aunque el resultado es el mismo si lo incluimos. Veamos, el problema de optimización de la regla de oro es

$$\begin{gathered} \text{Maximizar} \quad c^* = f(k^*) - (n+\delta) k^* \\ \text{sujeto a} \;\; k^* > 0 \end{gathered} \tag{52}$$

Por condiciones de primer orden,

$$\frac{dc^*}{dk^*} = \frac{d}{dk^*}\left[f(k^*) - (n+\delta) k^*\right] = 0 \tag{53}$$

luego, un posible punto crítico que satisfaga también las condiciones de segundo orden para el máximo, $\frac{d^2c^*}{dk^{*2}} < 0$, debe primero verificar que

$$f'(k_{oro}) = n + \delta$$

pues

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (n+\delta) = 0 \Rightarrow f'(k_{oro}) = n + \delta$$

Además, recordemos que en estado estacionario:

$$\dot{k} = sy - (n+\delta) k = 0 \Rightarrow sy^* = (n+\delta) k^* \Rightarrow (n+\delta) = \frac{sy^*}{k^*} \tag{54}$$

Igualando las expresiones (50) y (54):

$$f'(k_{oro}) = n + \delta = \frac{s_{oro} \cdot f(k_{oro})}{k_{oro}} \tag{55}$$

Por tanto, el ahorro de la regla de oro viene dado por:

$$s_{oro} = \frac{k_{oro} \cdot f'(k_{oro})}{f(k_{oro})} \qquad \square$$

PROPOSICIÓN 1.9. En una economía que sigue el marco de Solow–Swan, con una función de producción Cobb–Douglas, $f(k) = k^\alpha$, el capital por trabajador en estado estacionario que satisface la regla de oro, resulta ser:

$$k_{oro} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^* \tag{56}$$

y la tasa de ahorro asociada es:

$$s_{oro} = \alpha \tag{57}$$

Demostración. De nueva cuenta y sin pérdidad de generalidad, nos enfocaremos al caso sin progreso técnico. Por (50), el capital de oro debe verificar $f'(k_{oro}) = n + \delta$, luego

$$\alpha k^{\alpha-1} = n + \delta = \alpha k^{-(1-\alpha)} \Rightarrow k_{oro} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Sin embargo, no hemos corroborado la condición de segundo orden, veamos si se cumple:

$$\frac{d^2c^*}{dk^{*2}} = \frac{d}{dk^*}\left(\frac{dc^*}{dk^*}\right) = \frac{d}{dk^*}\left[f\,'\left(k^*\right) - (n+\delta)\right] = f\,''\left(k^*\right) < 0$$

pues la productividad marginal decreciente es uno de los supuestos de partida en el modelo. Por tanto, k_{oro} como lo hemos calculado en líneas anteriores, sí maximiza el consumo en estado estacionario.

Además, por (55) y la hipótesis de tecnología productiva Cobb–Douglas, el ahorro dorado está dado por

$$s_{oro} = \frac{k_{oro} \cdot f\,'\left(k_{oro}\right)}{f\left(k_{oro}\right)} = \frac{k_{oro} \cdot \alpha k_{oro}^{\alpha-1}}{k_{oro}^{\alpha}} = k_{oro} \cdot \alpha k_{oro}^{-1} = \alpha$$

Obsérvese que k^* es igual al valor del capital en regla de oro, pues

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}$$

como se enunció en la proposición. □

Analicemos con más detalle el caso general, abordado en la Proposición 1.8. Para una función de producción neoclásica cualquiera, concentremos nuestra atención en la tasa de ahorro que optimiza el consumo en estado estacionario. En esta situación, s debe ser tal que

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = 0 \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial^2 c^*}{\partial s^2} < 0$$

Para determinar el efecto específico de los cambios en s sobre c^*, podemos realizar el cálculo a detalle:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left[f\left(k^*\right) - (n+\delta)\,k^*\right] = f\,'\left(k^*\right)\frac{\partial k^*}{\partial s} - (n+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

es decir

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left[f\,'\left(k^*\right) - (n+\delta)\right]\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

Como $\frac{\partial k^*}{\partial s} > 0$, entonces el impacto concreto de s sobre c^* dependerá de si el producto marginal del capital supera o no al efecto de la depreciación más la tasa de natalidad:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} \gtreqless 0 \Leftrightarrow f\,'\left(k^*\right) \gtreqless (n+\delta)$$

lo que representamos en la siguiente gráfica.

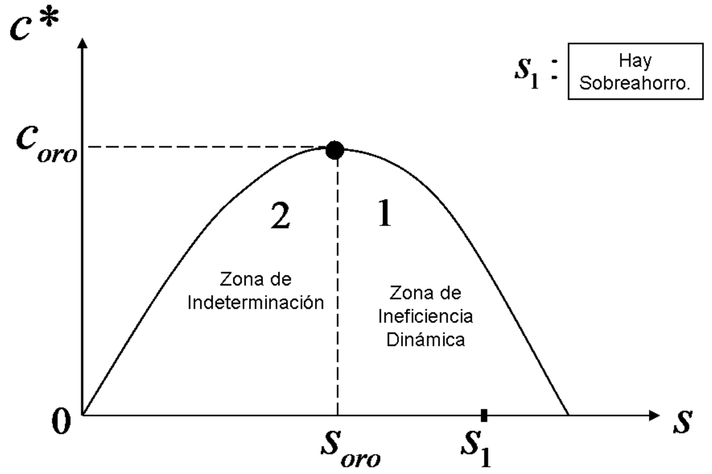

Figura 1.8. Regla de Oro y comportamiento del consumo.

Respecto a la región 1, podemos decir lo siguiente: en la medida que los ciudadanos gustan del consumo, entonces bajar la tasa de ahorro elevará su bienestar, pues éste bienestar depende positivamente de la cantidad consumida.[6] Por ello, se dice que en esta zona hay ineficiencia respecto al consumo.

Por el contrario, en la región 2 hay ambigüedad, pues decir si encontrarnos en esta zona es bueno o malo depende de la preferencia de los individuos por el consumo inmediato o el consumo futuro. Explicamos: la parte del ingreso destinada al consumo podemos destinarlo al consumo inmediato o bien podemos invertirlo para tener mayor ingreso después y haya oportunidad de un consumo futuro mayor que el actual. Como puede verse, en esta región todo depende de la tasa de descuento (o tasa de preferencia intertemporal): si a las personas les da lo mismo consumir ahora que en el futuro, entonces la zona 2 será dinámicamente ineficiente. Pero si a las personas les interesa más el consumo futuro que el actual (i.e., estamos en el caso de padres altruistas), no necesariamente hay ineficiencia dinámica.

Por último, destacamos el hecho de que en el modelo de Solow–Swan, cuando la función de producción es Cobb–Douglas, el capital de la regla de oro coincide con el capital por trabajador en estado estacionario; más adelante veremos que esto no siempre ocurre, como se mostrará en la versión del crecimiento óptimo de Ramsey–Cass–Koopmans.

1.7. LA CONTABILIDAD DEL CRECIMIENTO.

Como conclusión de la sección 1.5, podemos decir que en el largo plazo, el crecimiento del PIB per cápita sólo dependerá del avance tecnológico. Sin embargo, en el corto plazo, el crecimiento se produce por la aportación tanto del progreso técnico como de la acumulación de capital. En una tercera contribución al tema, Solow (1957) dio un ejemplo elemental de cómo analizar empíricamente, la aportación de ambas fuentes en el crecimiento de un país, en particular de los Estados Unidos durante el período de 1909–1949. Su análisis puede

[6] En una sociedad definida como consumista.

presentarse como sigue (los resultados son similares, pero si se desea ver el caso general, se sugiere la lectura de Romer, p. 22–24).
Supongamos que la producción en la economía está bien representada por una función Cobb–Douglas:

$$Y = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha} \tag{58}$$

Sean y y k el ingreso per cápita y el capital por trabajador, respectivamente. A partir de (58), se concluye que las tasas de crecimiento están vinculadas mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{y} &= \alpha \frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha) \frac{\dot{A}}{A} \\ \frac{\dot{y}}{y} &= \alpha \frac{\dot{k}}{k} + R(t) \end{aligned} \tag{59}$$

donde $R(t) = (1-\alpha) \dot{A}/A$. Respecto a (59), pueden recopilarse datos tanto de y como k, no así de $\dot{A}/A$. Lo que podemos hacer es una estimación del término $R(t)$ como un residuo de (59):

$$R(t) = \frac{\dot{y}}{y} - \alpha \frac{\dot{k}}{k} \tag{60}$$

Así, para un período definido, (59) proporciona una forma de descomponer el PIB per cápita en las contribuciones debidas a k y a un término remanente $R(t)$, conocido después como el residuo de Solow. Por la manera en la que hemos derivado (59), $R(t)$ se asocia con la aportación que el avance tecnológico hace al crecimiento, no obstante, lo que más bien está reflejando es la contribución de todas las fuentes que no hemos considerado además de la del progreso técnico, pues la operación $\dot{y}/y - \alpha\ \dot{k}/k$ en (60), da como resultado no sólo la aportación tecnológica al crecimiento, sino de hecho la de todo aquello que no es acumulación de capital físico, incluido el progreso tecnológico.
Mediante este análisis, Solow (1957) encontró que para el período 1909–1949, el 87.5 % del crecimiento de los Estados Unidos se debe al factor residual identificado como el avance tecnológico, y el restante 12.5 %, se debe al aumento del capital por trabajador. Estudios recientes y para otros países, presentan conclusiones similares (incluso para México, en cierto período, como veremos más adelante).
A manera de ilustración, veamos un ejercicio numérico muy sencillo, pero antes, nótese que el procedimiento empleado en líneas anteriores, puede realizarse también en términos de las variables agregadas Y, K, L: Si partimos de (58), es cierto que:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L} + R(t) \tag{61}$$

expresión que nos permite identificar como fuentes separadas al capital físico K y la mano de obra L.
EJEMPLO. Supongamos que la economía de cierto país verifica la siguiente función de producción: $Y = K^{1/2} (AL)^{1/2}$. Sabemos también que en un período de 20 años el ingreso se

multiplicó por un factor de 5.6, la fuerza laboral lo hizo en un 1.45 y el acervo de capital en 2.8. ¿Podríamos calcular las participaciones del capital, de la mano de obra y de la tecnología en la tasa de crecimiento del PIB?
Bien, como $Y = K^{1/2}(AL)^{1/2}$, entonces $\gamma_Y = \alpha\ \gamma_K + (1-\alpha)\ \gamma_L + R(t)$, con $\alpha = 1/2$ y donde $\gamma_Y = \dot{Y}/Y$, $\gamma_K = \dot{K}/K$, y $\gamma_L = \dot{L}/L$. Como datos, tenemos que en $t = 20$ años: $Y(20) = 5.6Y_0$, $L(20) = 1.45L_0$, $K(20) = 2.8K_0$. Lo que necesitamos calcular son las tasas de crecimiento asociadas, veamos: si $Y(t) = Y_0 e^{\gamma_Y t} \Rightarrow \gamma_Y = \frac{1}{t}\ln\left[\frac{Y(t)}{Y_0}\right] = 0.0861$, donde $\gamma_Y = 8.61$ % anual, es la tasa de crecimiento del ingreso. Análogamente, para la mano de obra y el capital se tiene: $\gamma_L = \frac{1}{t}\ln\left[\frac{L(t)}{L_0}\right] = 0.0185$, $\gamma_K = \frac{1}{t}\ln\left[\frac{K(t)}{K_0}\right] = 0.0514$. Así, ya podemos calcular el residuo de Solow: $R(t) = \gamma_Y - 1/2\ \gamma_K - 1/2\ \gamma_L = 0.0511$. Con esto, podemos determinar la participación de cada uno de los factores en este período de expansión del ingreso:

$$\text{Participación del capital: } \frac{1/2(0.0514)}{0.0861} \times 100\% \approx 30\ \%$$

$$\text{Participación del trabajo: } \frac{1/2(0.0185)}{0.0861} \times 100\% \approx 11\ \%$$

$$\text{Participación del residuo: } \frac{0.0511}{0.0861} \times 100\% \approx 59\ \%$$

EJEMPLO. Abordemos ahora un ejercicio con datos de la realidad económica. Durante la década de 1960 y hasta mediados de los años 70's, México experimentó un asombroso crecimiento económico cuyo motor era una estrategia nacionalista de sustitución de importaciones y responsabilidad en las finanzas públicas. Incluso, el desempeño nacional en este período fue conocido en el exterior como el "milagro mexicano" y mereció de parte de la comunidad internacional, credibilidad y reconocimientos tales como el honroso otorgamiento de los primeros juegos olímpicos a una nación del llamado Tercer Mundo, y poco después, un Mundial de fútbol. México era a todas luces una nación en auge. ¿Se ha preguntado cómo se comportaron los determinantes del crecimiento durante ese época? Haremos uso de datos recopilados para ese período por Abad–Ruiz (1981), quien de hecho, mediante aproximaciones numéricas trató de obtener una función de producción para México. Debido a que a nosotros nos interesa una función de producción analítica, haciendo una extensión sencilla de ese trabajo, hemos obtenido los siguientes resultados para las tasas de crecimiento anuales de la economía mexicana: $\gamma_Y = \dot{Y}/Y = 0.1174$, $\gamma_K = \dot{K}/K = 0.0691$, y $\gamma_L = \dot{L}/L = 0.0184$. Además, mediante una regresión logarítmica determinamos un valor de $\alpha = 0.257 \approx 1/4$. Luego, podemos calcular el residual de Solow $R(t)$ para el período: $R(t) = \gamma_Y - 1/4\ \gamma_K - 3/4\ \gamma_L = 0.0863$. Por tanto, con los datos disponibles para el período 1960–1975, podemos concluir que el milagroso crecimiento económico mexicano se debió a la siguiente participación aproximada de los factores de producción:

$$\text{Participación del capital: } \frac{1/4(0.0691)}{0.1174} \times 100\% \approx 14.7\ \%$$

$$\text{Participación del trabajo: } \frac{3/4(0.0184)}{0.1174} \times 100\% \approx 11.8\ \%$$

$$\text{Participación del residuo: } \frac{0.0861}{0.1174} \times 100\% \approx 73.5\ \%$$

Como puede verse, en este período definitivamente exitoso para México, se observa la misma característica que Solow destacó en su análisis de 1957 y que distinguió a la economía estadounidense al irse convirtiendo en potencia mundial: el gran impulso al crecimiento vino de la mejora tecnológica indirectamente medida en el residual $R(t)$.

Queremos enfatizar que, a pesar de su simplicidad palpable, este enfoque de contabilidad del crecimiento ya se ha aplicado en numerosas situaciones. Por ejemplo, Edward Denison encontró que las diferencias entre las tasas de crecimiento de países industrializados, como el lento crecimiento de Gran Bretaña versus el crecimiento rápido de Japón en la segunda mitad del siglo XX, podían explicarse por diferencias importantes en $R(t)$.

Un ejemplo más de la contabilidad del crecimiento se da al analizar de qué manera se está generando el crecimiento y si éste puede mantenerse (recuerde que a corto plazo la inversión en maquinaria ayuda al crecimiento, pero a largo plazo, sólo la eficiencia que conlleva el avance tecnológico, genera crecimiento sostenido). Veamos un caso particularmente crítico.

Es un asunto muy difundido la explicación de que la desintegración de la Unión Soviética obedeció en buena medida a razones económicas. Krugman (2000, p. 44–48) hace mención de un elemento distintivo del crecimiento de esta nación y que pudo contribuir a su desplome. La URSS de los años cincuenta y principios de los sesenta del siglo pasado, fue un caso muy especial en donde se alcanzó un crecimiento elevado del PIB pero sin acompañarse de un crecimiento del residuo asociado al progreso técnico. En estos años, la economía soviética estaba creciendo muy deprisa pero lo hacía a causa de la impresionante movilización laboral (del campo y de los hogares a la industria) y de las enormes tasas de inversión o ahorro; en contraste, el progreso técnico $R(t)$ crecía lentamente. Esto tenía como consecuencia que en cierto momento, el crecimiento del PIB tendría que disminuir. La razón es que al final, las autoridades soviéticas se quedarían sin amas de casa ni campesinos a quienes obligar a entrar a las fábricas, y aunque podían continuar invirtiendo una proporción importante de su producto, no podrían aumentar continuamente dicha proporción (recuerde que $0 < s < 1$). En síntesis, este tipo de crecimiento era cuestionable y planteaba dudas respecto a la efectividad de la dirección económica soviética. Ante la carencia (y ocultamiento) de cifras confiables, no puede precisarse cuándo se presentó ese momento de declive, pero lo que sí se puede decir es que seguramente pocos años después el crecimiento económico soviético disminuyó bruscamente. No nos referimos en este punto al hundimiento catastrófico que tuvo lugar mucho después, pero sí que este fue un fallo temprano y quizá un aviso de lo que vendría en las décadas siguientes. La conclusión una vez más, es que tasas altas de crecimiento económico deben ir acompañadas de aumentos igualmente altos de la mejora tecnológica $R(t)$, de lo contrario, si el crecimiento del PIB es más bien resultado de la movilización de los recursos (mano de obra y capital físico) más que de la eficiencia técnica considerada en $R(t)$, entonces el crecimiento sólo será temporal y tarde o temprano se llegará al estancamiento predicho en la Proposición 1.6.

Este es un buen momento para recapitular: todo este enfoque y la realización de contabilidad del crecimiento puede sonar bien pero recordemos algo importante: Medir algo no es explicarlo, y lo que estamos haciendo aquí es dar cuenta de la tecnología (o de medidas indirectas de ella) como fuente duradera de crecimiento, pero al interior de este modelo no hemos explicado absolutamente nada respecto a tal tecnología (¿cómo se genera?¿cómo se mantiene su avance?¿qué relación guarda con las variables económicas más allá de tener el efecto de eficientar la fuerza laboral?). Esto es, podemos decir que hemos hecho uso de la tecnología para solventar una laguna importante del modelo, pero en realidad no lo hemos enriquecido interpretativamente vinculando al progreso técnico como variable susceptible de manipulación. Ahondaremos en esta y otras fallas en la siguiente sección.

1.8. VENTAJAS Y LIMITACIONES DEL MODELO SOLOW–SWAN.

Lo primero que puede decirse respecto al enfoque Solow–Swan abordado aquí para modelar el crecimiento de las naciones, es que rompe con los dos resultados principales de Harrod–Domar: a) el crecimiento es proporcional a la inversión y b) el sistema económico capitalista es inherentemente inestable. En contraste, del modelo de Solow–Swan se concluye que la inversión no es el principal impulsor del crecimiento y las economías capitalistas son dinámicamente estables. En particular y cambiando el paradigma anterior, Solow–Swan afirmaban que la inversión en maquinaria no puede ser una fuente de crecimiento en el largo plazo. La única fuente posible de crecimiento en el largo plazo es el cambio tecnológico, en pleno contraste con la idea de que la inversión en maquinaria, instalaciones y equipo es la solución para impulsar el crecimiento en el largo plazo. En este primer modelo que hemos visto se encuentra que esto no es así.

Ahora, lo más importante es abordar la siguiente pregunta ¿qué tan bien se corresponde el modelo de Solow–Swan con la evidencia empírica? Bien, en primer lugar el modelo explica las diferencias en el ingreso per cápita (y por ende la riqueza o pobreza) de las naciones como resultado de contrastantes tasas de inversión (ahorro) y de natalidad, y principalmente de diferencias tecnológicas. Así, según el modelo analizado, la razón de que haya países tan ricos y otros tan pobres se debe a que los ricos invierten más, tienen menores tasas de natalidad y un avance tecnológico superior; estas tres cosas permiten acumular mayor capital por trabajador y por tanto, tener un ingreso per cápita superior.

En segundo lugar, ante la pregunta ¿por qué muchas de las economías nacionales muestran un crecimiento sostenido? La primer versión del modelo no era capaz de explicarlo, de hecho, se concluía que aunque las naciones podrían crecer temporalmente, a largo plazo el crecimiento terminaba y se llegaría a un estancamiento permanente. Sin embargo, en la versión con progreso técnico se concluye que la tecnología es la fuerza motriz del crecimiento sostenido. Revisando ambas versiones del modelo, podemos decir entonces que en ausencia de avance tecnológico, a la larga el crecimiento será nulo; por el contrario, si el progreso tecnológico está presente, no solo da lugar a que haya crecimiento a largo plazo, sino que además los países crecerán a la misma tasa a la que lo hace la tecnología.

Las predicciones del modelo de Solow–Swan parecen confirmarse con la evidencia empírica. A manera de ejemplo, se sabe que los países con altas tasas de inversión tienden a ser más ricos, en promedio, que los países con tasas de inversión bajas, y los países con altas tasas de crecimiento de la población tienden a ser más pobres, en promedio.

Pero este éxito aparente no es lo único importante. Debemos hacer un comentario respecto a los papeles que la tecnología, la inversión y la reducción de la natalidad tienen en el crecimiento. Ya dijimos que los tres factores contribuyen positivamente pero en este apartado no hemos sido del todo claros respecto a cómo lo hacen y exactamente qué es lo que hacen. En realidad, ni el ahorro o inversión, ni reducir la tasa de natalidad, son capaces de sostener un crecimiento económico a largo plazo. Lo que ocurre es que, por ejemplo, una economía con ahorro más alto tendrá un ingreso mayor en estado estacionario y además favorecerá el crecimiento en un lapso temporal corto, pero en definitiva no modifica la tasa de crecimiento en el largo plazo, que sería nula si no hubiera cambio tecnológico. Como ya vimos, lo único que puede generar crecimiento sostenido es la tecnología. El problema es que afirmar que los países tienen diferentes tasas de crecimiento debido a un misterioso cambio tecnológico sin dependencia de variables económicas, no es satisfactorio. Dicho de otra manera, lo que molesta del progreso tecnológico manejado aquí, es su independencia de cualquier variable económica como si no procediera de ninguna parte, simplemente está ahí y mejora con el transcurso del tiempo a una tasa no modificable por variable económica alguna. Además, en claro contraste con la realidad, la tecnología vista aquí tiene la ventaja de progresar de forma gratuita, sin costos asociados pues no tenemos que dedicar recursos para descubrir nuevas ideas ni para ponerlas en práctica.

No es la única crítica respecto a la utilización del progreso técnico como aquí se hizo: en el ejercicio de la contabilidad del crecimiento, el término asociado al avance tecnológico en realidad recoge la influencia de todas las demás cosas no explicadas por el modelo, algo a lo que Solow hizo referencia llamándole atinadamente al término $R(t)$, la "medida de nuestra ignorancia". Es decir, no es sólo la tecnología lo que estamos midiendo en el término $R(t)$; más bien, es la tecnología y todo lo demás que está afectando al crecimiento y no sabemos qué es.

Por todo lo anterior se dice que la tecnología es una solución oscura, extraña, exógena, de la que en términos económicos, no se sabe de dónde viene ni por qué se presenta.

Con esto, podemos decir que, aunque el modelo Solow–Swan tiene relativo éxito al dar cuenta de varios de los hechos asociados al crecimiento económico, siendo rigurosos deja sin explicar cabalmente lo que se supone es el punto central: ¿por qué hay crecimiento y cómo es que se mantiene en el largo plazo? Claro que la respuesta parcial a esto, es la tecnología, pero la cuestión ahora es ¿como modelarla? ¿cómo integrarla al modelo en forma coherente con las variables económicas?

1.9. EL MODELO DE RAMSEY–CASS–KOOPMANS.

En párrafos anteriores mencionamos dos limitaciones del modelo de Solow–Swan: una muy relevante, a) el estancamiento de la economía cuando no hay progreso tecnológico, y la otra de un peso un tanto menor pero aún así importante: b) el hecho de que la tasa de ahorro está dada exógenamente. Para la primera limitante hemos visto ya como Solow considera el progreso técnico en su modelo para evadir el estancamiento, pero aún queda sin resolver la segunda limitante: ¿cómo incorporar un comportamiento más realista del ahorro y por tanto del consumo?

Esto es lo que veremos a continuación en el enfoque ahora nombrado como modelo de Ramsey–Cass–Koopmans. Este es un modelo de crecimiento económico con una estructura similar a la de Solow pero con una mejora sustancial: permite determinar endógenamente la tasa de ahorro y por tanto el consumo de la economía, de manera que estos dos aspectos ya no son de naturaleza exógena, sino que quedan determinados bajo una dinámica específica. Veamos a continuación los detalles de la aproximación de Ramsey–Cass–Koopmans (RCK en lo sucesivo), que inauguró el enfoque optimizador en la teoría del crecimiento.

1.9.1. SUPUESTOS. Se asumen los mismos supuestos que en Solow–Swan sin tecnología, excepto el número III: las familias ahorran una fracción constante del ingreso:

$$S = sY \tag{3}$$

donde s es el coeficiente de ahorro y verifica: $0 < s < 1$. Por ende, bajo esa condición restrictiva, el consumo es la fracción restante del ingreso:

$$C = (1 - s) Y \tag{4}$$

En lugar de esta hipótesis simplificadora, describiremos la actuación de las familias cuando éstas planean su consumo futuro de modo que maximice su bienestar.
Asi, en este enfoque RCK las personas maximizan una función de bienestar de la forma:

$$U = \int_0^\infty e^{-(\rho - n)t} u(c)\, dt \tag{62}$$

con $u(c)$ como función de utilidad[7] y donde ρ es una tasa de descuento que representa qué tanto los individuos prefieren el consumo propio más que el consumo de sus hijos o de sus descendientes (tal que $\rho > n$, por razones que se explicarán más adelante).[8]
El capital físico por trabajador está gobernado por

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta) k \tag{63}$$

donde c es el consumo escogido por las personas, $f(k) = y$ es la cantidad producida, ambos términos en variables per cápita. En el modelo de Solow con "tasa de ahorro constante", después de la ecuación (63), suponíamos que $c = (1 - s) f(k)$ y sustituíamos esto en (63) para obtener la ecuación fundamental de Solow:

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= f(k) - c - (n + \delta) k = f(k) - (1 - s) f(k) - (n + \delta) k \\
&= f(k) - f(k) + sf(k) - (n + \delta) k \\
\dot{k} &= sf(k) - (n + \delta) k \qquad (15)
\end{aligned}$$

Sin embargo, como ya dijimos, ese enfoque no será utilizado aquí. Por el contrario, en RCK el problema a abordar es el siguiente:

$$\text{Maximizar } \; U = \int_0^\infty e^{-(\rho - n)t} u(c)\, dt$$

Sujeto a

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta) k \tag{63}$$

que abordaremos a continuación.

[7] El parámetro ρ también se interpreta como una medida del egoísmo o altruismo paterno en el siguiente sentido: cuanto mayor sea ρ, mayor será la cantidad consumida hoy (por parte de los padres) y menor la cantidad que podrán consumir en el futuro (los hijos); en este caso se habla de egoísmo paterno. En el caso contrario, cuando los padres tienen un menor consumo presente (esto es, ρ será menor) entonces en el futuro se alcanzará un consumo mayor (que disfrutarán los hijos), y lo que se tiene es una situación de altruismo. Una forma adicional de nombrar a ρ es como tasa de preferencia temporal.

[8] Para garantizar que la integral sea convergente.

1.9.2. LA DINÁMICA DEL MODELO. Bajo el esquema del apartado anterior y considerando una función de utilidad específica para simplificar el análisis:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} \tag{64}$$

podemos probar los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 1.10. Para una economía como la descrita en la sección 1.9.1, y con una función de producción per cápita representada por $y = f(k) = Ak^{\alpha}$, entonces la tasa de crecimiento del consumo viene dada por:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \left[\alpha A k^{-(1-\alpha)} - (\delta + \rho)\right] \tag{65}$$

Demostración. Debemos resolver el siguiente ejercicio de optimización dinámica:

$$\text{Maximizar} \;\; U = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} e^{-(\rho - n)t} dt$$

Sujeto a

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta) k \tag{63}$$

El *Hamiltoniano* de nuestro problema será

$$H(\cdot) = u(c) \;\; e^{-(\rho - n)t} + \nu \; \dot{k} \tag{66}$$

$$H(\cdot) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} \; e^{-(\rho - n)t} + \nu \; \left[f(k) - c - (n + \delta) k\right] \tag{67}$$

donde $\nu = \nu(t)$ es un multiplicador al estilo de los multiplicadores de Lagrange en optimización estática.

Las Condiciones de Primer Orden son:

$$H_c = 0 \tag{68}$$

$$H_k = -\dot{\nu} \tag{69}$$

Realizando el trabajo algebraico:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = H_c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\theta}{1-\theta} c^{-\theta} \; e^{-(\rho - n)t} - \nu = 0 \\ \\ c^{-\theta} \; e^{-(\rho - n)t} - \nu = 0 \end{cases} \tag{70}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = H_k = -\dot{\nu} \Leftrightarrow \nu \; \left[f'(k) - (n + \delta)\right] = -\dot{\nu} \tag{71}$$

Si tomamos logaritmos en (70), y derivamos respecto al tiempo para obtener la tasa de crecimiento del consumo per cápita:

$$c^{-\theta} \; e^{-(\rho - n)t} - \nu = 0 \Leftrightarrow c^{-\theta} \; e^{-(\rho - n)t} = \nu$$

$$\begin{aligned}\ln c^{-\theta} + \ln e^{-(\rho-n)t} &= \ln \nu \\ -\theta \ln c - (\rho - n)\, t &= \ln \nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[-\theta \ln c - (\rho - n)\, t\right] &= \frac{d}{dt}\left[\ln \nu\right] \\ -\theta\frac{\dot{c}}{c} - (\rho - n) &= \frac{\dot{\nu}}{\nu} \qquad (72)\end{aligned}$$

Rearreglando la ecuación (71):

$$\begin{aligned}-\frac{\dot{\nu}}{\nu} &= f'(k) - (n+\delta) \\ &\Updownarrow \\ \frac{\dot{\nu}}{\nu} &= (n+\delta) - f'(k) \qquad (73)\end{aligned}$$

Sustituyendo (72) en (73):

$$-\theta\frac{\dot{c}}{c} - (\rho - n) = (n+\delta) - f'(k)$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{1}{\theta}\left[(n+\delta) - f'(k) + (\rho - n)\right] \\ &= -\frac{1}{\theta}\left[(\delta+\rho) - f'(k)\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - (\delta+\rho)\right] \qquad (74)$$

Por último, como $f(k) = Ak^{\alpha}$, entonces si se sustitiye $f'(k) = \alpha A k^{-(1-\alpha)}$ en (74) obtenemos la expresión (65) y termina la prueba. $\square$

PROPOSICIÓN 1.11. La economía descrita en esta sección posee tres puntos de equilibrio, con coordenadas:

$$\begin{aligned}&(0,0) \\ (k^*, c^*) = &\left(\left(\tfrac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, A\,(k^*)^{\alpha} - (n+\delta)\, k^*\right) \\ (k^{**}, 0) = &\left(\left(\tfrac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0\right)\end{aligned} \qquad (75)$$

Demostración. Las expresiones (65) y (63) determinan completamente la dinámica del capital y el consumo del modelo. Reescribiendo (65) y sustituyendo $y = Ak^{\alpha}$ en (63), tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \tfrac{c}{\theta}\left[\alpha A k^{-(1-\alpha)} - (\delta+\rho)\right] \\ \dot{k} &= Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)\, k\end{aligned} \qquad (76)$$

Luego, tomemos en cuenta que en el equilibrio: $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$. Así, las curvas $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$ se cruzan tres veces: $(0, 0)$, (k^*, c^*) y $(k^{**}, 0)$.
Si $c = 0$ y $k = 0$, simultáneamente, entonces: $\dot{c} = \dot{k} = 0$. Por otro lado, si $\alpha A k^{-(1-\alpha)} - (\delta + \rho) = 0$, entonces $\dot{c} = 0$ y $k^{-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha A}(\delta + \rho)$: $k^* = \left(\frac{\delta+\rho}{\alpha A}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, además $c^* = A(k^*)^\alpha - (n + \delta) k^* = f(k^*) - (n + \delta) k^*$, dará lugar a que $\dot{k} = 0$. Finalmente, si $c = 0$ pero $k \neq 0$, entonces $\dot{c} = 0$ y $0 = Ak^\alpha - (n + \delta) k$, tal que $k^{**} = \left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.
Observe que $k^{**} = \left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^*$, pues $A > \alpha A$ (ya que $0 < \alpha < 1$) y $\rho > n$.
Recapitulando, los puntos de equilibrio son:

$$\begin{aligned} &(0,0) \\ (k^*, c^*) &= \left(\left(\frac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, A(k^*)^\alpha - (n+\delta) k^*\right) \\ (k^{**}, 0) &= \left(\left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0\right) \end{aligned}$$

y finaliza la demostración. □
Es destacable el hecho de que en términos efectivos, el único punto de interés económico, es (k^*, c^*), puesto que es el único que conlleva cantidades positivas de consumo y de capital simultáneamente.
PROPOSICIÓN 1.12. La economía descrita en esta sección tiene una estabilidad de punto silla en el equilibrio no trivial y su diagrama de fases está dado por la Figura 1.9.
Demostración. Para determinar la estabilidad de la economía, podemos emplear la linealización de la función:

$$F(c, k) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{\theta}\left[f'(k) - (\delta + \rho)\right], \\ f(k) - c - (n + \delta) k \end{array} \right\} \tag{77}$$

en el punto de equilibrio. Por consiguiente, la matriz jacobiana de la aproximación lineal es:

$$\begin{aligned} J(c^*, k^*) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial c} & \frac{\partial F_1}{\partial k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial c} & \frac{\partial F_2}{\partial k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta}\left[f'(k^*) - (\delta + \rho)\right] & \left(\frac{c^*}{\theta}\right) f''(k^*) \\ -1 & f'(k^*) - (n + \delta) \end{pmatrix} \qquad (78) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta}\left[\alpha A (k^*)^{-(1-\alpha)} - (\delta + \rho)\right] & \left(\frac{c^*}{\theta}\right)\left[-\alpha(1-\alpha) A (k^*)^{-(2-\alpha)}\right] \\ -1 & \alpha A (k^*)^{-(1-\alpha)} - (n + \delta) \end{pmatrix} \qquad (79) \end{aligned}$$

Como vimos en la prueba de la Proposición 1.11, $f'(k^*) - (\delta + \rho) = 0$; además:

$$\begin{aligned} f'(k^*) - (n + \delta) &= \alpha A (k^*)^{-(1-\alpha)} - (n + \delta) \\ &= \alpha A \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{-(1-\alpha)}{1-\alpha}} - (n + \delta) \\ &= \rho - n \qquad (80) \end{aligned}$$

a partir de lo cual, podemos afirmar que la matriz jacobiana está dada por

$$\begin{aligned} J(c^*, k^*) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta}\left[f'(k^*) - (\delta+\rho)\right] & \left(\frac{c^*}{\theta}\right) f''(k^*) \\ -1 & f'(k^*) - (n+\delta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{c^*}{\theta}\right) f''(k^*) \\ -1 & \rho - n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{81}$$

cuya traza y determinante son:

$$TrJ = 0 + (\rho - n) = \rho - n > 0$$

$$DetJ = \left[(0)(\rho - n) - (-1)\left(\frac{c^*}{\theta}\right) f''(k^*)\right] = \left(\frac{c^*}{\theta}\right) f''(k^*) < 0$$

lo cual implica que hay dos raíces reales: una negativa y la otra positiva. Esto permite identificar al estado estacionario (c^*, k^*) como un punto silla y, por lo tanto, como un equilibrio inestable. En consecuencia, sólo bajo ciertas condiciones iniciales en el capital y en el consumo (aquellas que se ubiquen sobre el camino de ensilladura), se podrá cumplir que las trayectorias óptimas alcancen el estado estacionario.[9]

A largo plazo, la economía debe converger hacia el estado estacionario (k^*, c^*), que es el único que conlleva cantidades positivas de consumo. Por un procedimiento análogo para $(0,0)$ y $(k^{**}, 0)$, se puede concluir que:

a) El origen es un estado estacionario inestable (es una fuente).

b) El segundo estado estacionario, (k^*, c^*), tiene estabilidad de punto silla.

c) El tercer estado estacionario, $(k^{**}, 0)$, es completamente estable (es un sumidero).

Por último, a partir de (76), trazamos el diagrama de fase representado en la Figura 1.9. □

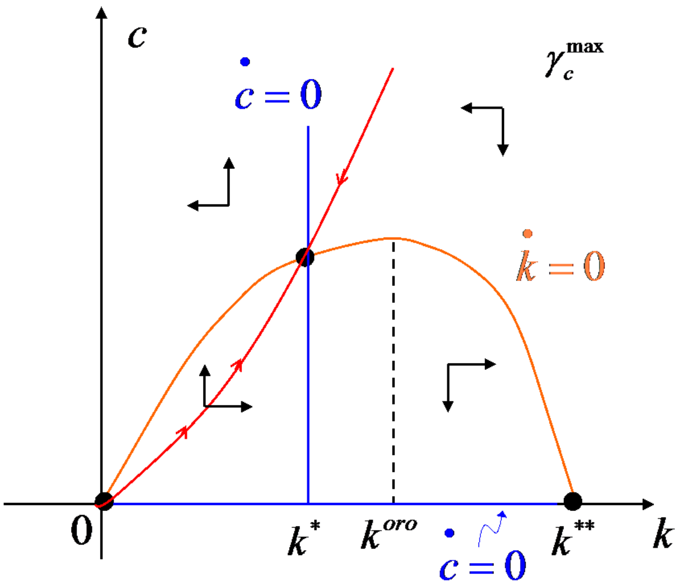

Figura 1.9. Diagrama de fase en el modelo de Ramsey.

[9]En realidad, debido a las llamadas condiciones de transversalidad –que no veremos aquí–, se garantiza que la rama estable es la única trayectoria posible en esta economía.

1.10. LA APARICIÓN DE LOS MODELOS ENDÓGENOS.

Después del surgimiento del modelo de Solow–Swan y de la adecuación del modelo de Ramsey en el contexto de la teoría del control óptimo, las investigaciones en torno al crecimiento económico alcanzaron su clímax durante los años 1960's; sin embargo, el ritmo e impacto de las investigaciones se fue reduciendo gradualmente hasta que a mediados y sobretodo finales de los años 1970's prácticamente la teoría del crecimiento se estancó como disciplina, pues se había alcanzado un estado tal que los trabajos realizados cada vez tenían una mayor formalización matemática, lo cual era positivo, pero prácticamente no se generaban nuevos avances interpretativos, por lo que en el balance esta carencia tenía un peso mayor.

El escenario cambió con la presentación en 1986 de lo que se hoy se identifica como el punto de partida de los modelos endógenos del crecimiento: la versión debida a Paul Romer, quien ofreció el primer ejemplo de cómo resolver el problema de tecnologías exógenas dirigiendo el crecimiento, rasgo característico del enfoque de Solow y que no se había abordado satisfactoriamente hasta ese momento.

Veamos a continuación un par de modelos ilustrativos.

1.11. EL MODELO AK DE REBELO.

Este modelo atribuido a Sergio Rebelo (1991), es el más sencillo de la corriente endógena vigente, y se distingue por plantear una función de producción que sólo considera al capital físico como factor productivo y no a la mano de obra ni otras formas de capital, como el capital humano.[10]

En un marco parecido al de Solow y con el enfoque optimizador RCK, este modelo muestra que: a) la economía puede estar en crecimiento permanentemente, y b) el ahorro sí influye en la tasa de crecimiento, sin necesidad de utilizar enfoques exógenos o externos al modelo.

1.11.1. SUPUESTOS. Los mismos que en la versión de Solow–Swan, excepto tres: primero, las familias no van a ahorrar una fracción constante del ingreso sino que la tasa de ahorro será endógena;[11] segundo, la tecnología será un parámetro positivo tal que $A > (\delta + \rho)$ y $\dot{A}/A = 0$; y tercero, la función de producción no cumplirá dos aspectos distintivos de la neoclásica: productividad marginal decreciente del capital y las condiciones de Inada. En concreto, la función de producción vendrá dada por

$$Y = AK \tag{82}$$

donde $A > 0$. Con esto, podemos ver que en este modelo se tienen productos marginales positivos pero no decrecientes del capital:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A > 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = 0 \tag{83}$$

Por ende, tampoco se satisfacen las condiciones de Inada:

[10] Aunque en la literatura se muestra que esta formulación es equivalente a aquella que sí los incorpora explícitamente, incluida la mano de obra, modificando con esto la definición de un parámetro A que veremos más adelante.

[11] Los consumidores maximizan una función de bienestar social como en la versión de Ramsey.

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial K}=A\neq 0;\quad \lim_{K\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K}=A\neq\infty \tag{84}$$

como mencionábamos al principio.

1.11.2. LA DINÁMICA DEL MODELO. Las familias maximizan la siguiente función de bienestar social:

$$U=\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

Sujetas a la restricción presupuestaria:

$$\dot{k}=f\left(k\right)-c-\left(n+\delta\right)k \tag{63}$$

Procediendo como en la sección de RCK, podemos probar los siguientes resultados.
PROPOSICIÓN 1.13. Si una economía cumple con los requisitos de la sección 1.11.1, entonces la tasa de crecimiento del consumo per cápita viene dada por:

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{A-(\delta+\rho)}{\theta} \tag{85}$$

Demostración. Empecemos por definir las variables per cápita:

$$Y=AK\Rightarrow\frac{Y}{L}=\frac{AK}{L}\Rightarrow y=Ak \tag{86}$$

$$c=\frac{C}{L};\quad k=\frac{K}{L} \tag{87}$$

Luego, como en RCK, debemos resolver el siguiente ejercicio de optimización dinámica:

$$\text{Maximizar }\ U=\int_0^\infty\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{-(\rho-n)t}dt$$

Sujeto a

$$\dot{k}=f\left(k\right)-c-\left(n+\delta\right)k \tag{63}$$

El *Hamiltoniano* de nuestro problema será

$$H\left(\cdot\right)=u\left(c\right)\ e^{-(\rho-n)t}+\nu\ \dot{k} \tag{66}$$

$$H\left(\cdot\right)=\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}\ e^{-(\rho-n)t}+\nu\ \left[f\left(k\right)-c-\left(n+\delta\right)k\right] \tag{67}$$

Las Condiciones de Primer Orden son:

$$H_c=0 \tag{68}$$

$$H_k=-\dot{\nu} \tag{69}$$

De donde se tiene que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f\,'(k) - (\delta + \rho)\right] \tag{88}$$

Por último, como $f(k) = Ak$, entonces si se sustituye $f\,'(k) = A$ en (88) obtenemos la expresión (85). □

PROPOSICIÓN 1.14. Si una economía cumple con los requisitos de la sección 1.11.1, entonces su tasa de crecimiento es constante e igual a:

$$\gamma = \frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} \tag{89}$$

tal que todas las variables per cápita crecen a esa misma tasa:

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_c = \frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} \tag{90}$$

Además, la fracción de ahorro, s, es constante.

Demostración. De (85) tenemos que $c(t) = c_0 e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t}$. Sustituyendo este resultado en (63), y resolviendo la ecuación diferencial resultante obtenemos

$$k(t) = \frac{c_0}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)} e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t} + \left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right] \cdot e^{(A-n-\delta)t}$$

Por la condición de transversalidad,[12] se tiene que

$$\left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right] = 0$$

Luego,

$$k(t) = \frac{c_0}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)} e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t} = \frac{c(t)}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}$$

Es decir, $k(t)$, y $c(t)$, son proporcionales en todo momento:

$$k(t) = m\, c(t)$$

donde

$$m = \frac{1}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}$$

es una constante. Luego,

$$\frac{d}{dt}\ln k(t) = \frac{d}{dt}m + \frac{d}{dt}\ln c(t) \Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k} = 0 + \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{c}}{c}$$

Por tanto, si

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

[12] Véase el Apéndice C, proposición C.2.

Entonces

$$\gamma_k = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) = \gamma_c$$

Además, $y = Ak$, de manera que:

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) = \gamma \quad \forall t$$

Por otro lado, sabemos que, por definición, el consumo es lo que resta tras apartar una fracción s del ingreso para ahorrar $(0 < s < 1)$, tal que

$$c = (1 - s) y \Rightarrow \ln c = \ln (1 - s) + \ln y \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\overline{(1 - s)}}}{(1 - s)} + \frac{\dot{y}}{y}$$

$$\gamma_c = \frac{\dot{\overline{(1 - s)}}}{(1 - s)} + \gamma_y = \gamma_{(1-s)} + \gamma_y$$

De manera que si $\gamma_c = \gamma_y$ (como acabamos de probar), entonces la fracción de ahorro, s, debe ser constante.[13] Más adelante veremos que aunque la fracción s sigue siendo constante, ya no es exógena. □

¿Qué implicaciones económicas tienen estos dos primeros resultados? Observemos un hecho importante, por la restricción inicial de que $A > (\delta + \rho)$, esta vez el crecimiento económico no experimenta descensos sino solo un constante incremento. Y para ello, no hemos tenido que recurrir al supuesto de que una variable crecía de forma contínua y exógena, cosa que distinguía al enfoque de Solow y se conserva en la versión de Ramsey–Casss–Koopmans. Este hecho es una diferencia importante y es la razón por la que al modelo AK y a los demás agrupados bajo la misma denominación, se les llama "modelos de crecimiento endógeno". Sin embargo, hay otros consecuencias en el crecimiento que se apartan de la línea de Solow y RCK, como se muestra en la siguiente:

PROPOSICIÓN 1.15. A diferencia de los modelos anteriores, en esta economía el ahorro sí interviene en la tasa de crecimiento, y su efecto está presente bajo la siguiente forma funcional:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - (n + \delta) \tag{91}$$

Demostración. Sabemos que la inversión neta se rige por

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - c - (n + \delta) k &\quad (63) \\ &= i_B - (n + \delta) k &\quad (92) \end{aligned}$$

donde i_B es la inversión bruta per cápita. En equilibrio, $sy = i_B$, luego

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{i_B}{k} - (n + \delta) = \frac{sy}{k} - (n + \delta) \tag{93}$$

[13] Si s es constante, entonces $(1 - s)$ también lo es, y la tasa de crecimiento de $(1 - s)$ es nula: $\gamma_{(1-s)} = 0$ (la tasa de crecimiento de una constante, es cero).

$$\Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = sA - (n + \delta)$$

pues $y = Ak$, por hipótesis. $\square$
Así, contrariamente a lo que predice el modelo Solow–Swan, el ahorro (y la inversión) afecta a la tasa de crecimiento de la economía. Como puede verse, su efecto es positivo, al igual que el de la tecnología que ya podía intuirse desde la ecuación (85). Usando estas dos expresiones para la tasa de crecimiento de la economía (que son una misma tasa pero expresada de forma diferente), podemos establecer también el siguiente resultado:
PROPOSICIÓN 1.16. La economía descrita en el modelo AK, tiene una fracción de ahorro determinada endógenamente y dada por:

$$s = \left[\frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} + n + \delta \right] \frac{1}{A} \tag{94}$$

Demostración. Por la Proposición 1.14, sabemos que las tasas de crecimiento del capital y el consumo per cápita son iguales. Si hacemos uso de las expresiones (85), (90) y (91), se tiene

$$\gamma_k = sA - (n + \delta) = \frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} = \gamma_c$$

despejando la tasa de ahorro el resultado es inmediato. Una forma alternativa de probar la proposición, es la siguiente: $c = (1 - s)\, y$, luego,

$$s = 1 - \frac{c}{y} = 1 - \frac{c}{Ak}$$

pero $k = mc$ (como vimos al probar la proposición 1.14), tal que

$$s = 1 - \frac{c}{Ak} = 1 - \frac{c}{A \cdot mc} = 1 - \frac{1}{A \cdot m}$$

Sustituyendo el valor de m:

$$s = 1 - \frac{1}{A \frac{1}{(A-n-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}} = 1 - \frac{(A - n - \delta) - \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)}{A} = \frac{A - (A - n - \delta) + \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)}{A}$$

$$s = \frac{n + \delta + \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)}{A} = \left[\frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} + n + \delta \right] \frac{1}{A} \tag{94}$$

En conclusión, la tasa de ahorro s efectivamente es endógena y constante durante todo el proceso. $\square$
Un aspecto adicional y que será de utilidad para el cálculo del bienestar social es el que sigue:
PROPOSICIÓN 1.17. Para la economía bajo análisis, los niveles iniciales de consumo y de capital por trabajador, guardan la siguiente relación:

$$c_0 = [A - (n + \delta + \gamma)]\, k_0 \tag{95}$$

Demostración. Por la Proposición 1.14, la inversión neta $\dot{k}$ es igual a γk, pues

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma \Rightarrow \dot{k} = \gamma k$$

Sustituyendo este resultado en (63), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - c - (n+\delta) k = Ak - c - (n+\delta) k \\ &= [A - (n+\delta)] k - c \end{aligned} \tag{96}$$

$$\gamma k = [A - (n+\delta)] k - c$$

entonces

$$c = [A - (n+\delta+\gamma)] k \tag{97}$$

En el inicio, $t = 0$,

$$c_0 = [A - (n+\delta+\gamma)] k_0$$

que era lo que se deseaba demostrar.[14] $\square$
Finalmente, también podemos analizar estabilidad en el modelo.
PROPOSICIÓN 1.18. La economía analizada en este modelo tiene una dinámica de tipo repulsor o fuente en el único equilibrio que posee, el origen.
Demostración. La dinámica del capital y el consumo está completamente determinada por las expresiones (85) y (96):

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{A - (\delta+\rho)}{\theta} \tag{85}$$

$$\dot{k} = [A - (n+\delta)] k - c \tag{96}$$

y que dejaremos indicadas como sigue:

$$\dot{c} = c \left[\frac{A - (\delta+\rho)}{\theta} \right] \tag{98}$$

[14] El término entre paréntesis es positivo por razón de una restricción adicional respecto a θ, y que se introducirá más adelante ($\theta \geq 1$):
$c_0 = [A - (n+\delta+\gamma)] k_0$, luego

$$c_0 = \left\{ A - \left[n + \delta + \frac{A - (\delta+\rho)}{\theta} \right] \right\} k_0 = \left\{ A - \left[\frac{(n+\delta)\theta + A - (\delta+\rho)}{\theta} \right] \right\} k_0$$

$$= \left\{ A - \left[\frac{n\theta - (1-\theta)\delta + A - \rho}{\theta} \right] \right\} k_0 = \left[\frac{\theta A - n\theta + (1-\theta)\delta - A + \rho}{\theta} \right] k_0$$

Finalmente,

$$c_0 = \left[\frac{\rho - n\theta + (1-\theta)\delta - (1-\theta) A}{\theta} \right] k_0$$

expresión válida si $\theta \geq 1$ y $\rho - n > 0$.

$$\dot{k} = [A - (n + \delta)]\, k - c \tag{96}$$

Obsérvese que este sistema que representa la dinámica de la economía, puede escribirse:

$$\dot{c} = \gamma c \tag{99}$$

$$\dot{k} = \beta k - c \tag{100}$$

donde

$$\gamma = \frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} > 0 \tag{101}$$

$$\beta = A - (n + \delta) > 0 \tag{102}$$

puesto que $A > \delta + \rho$ y $\rho - n > 0$ por hipótesis, luego: $A - (\delta + \rho) > 0$ y además: $A > \delta + \rho > \delta + n \Rightarrow A - (n + \delta) > 0$. De esta manera, por (99) y (100), el único punto posible que satisface simultáneamente $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$, es el origen $(0, 0)$.
Para determinar la estabilidad de la economía, podemos emplear la linealización de la función:

$$F(c, k) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} c \left[\frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} \right] \\ {[A - (n + \delta)]\, k - c} \end{array} \right\} \tag{103}$$

en la vecindad del punto de equilibrio. Por consiguiente, la matriz jacobiana de la aproximación lineal es:

$$\begin{aligned} J(c^*, k^*) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial c} & \frac{\partial F_1}{\partial k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial c} & \frac{\partial F_2}{\partial k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{A - (\delta + \rho)}{\theta} & 0 \\ -1 & A - (n + \delta) \end{pmatrix} \qquad (104) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \qquad (105) \end{aligned}$$

y su polinomio característico es:

$$(\gamma - X)(\beta - X) = 0 \tag{106}$$

luego, se tienen dos valores propios positivos: $X_1 = \gamma$ y $X_2 = \beta$. Esto permite identificar al estado estacionario $(c^*, k^*) = (0, 0)$ como una fuente y, por lo tanto, como un equilibrio inestable. En esta economía todas las trayectorias son explosivas.

1.11.3. EL BIENESTAR. Efectuemos ahora el cálculo de la función de bienestar de la sociedad descrita por este modelo:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

Obsérvese que un primer requisito para que la utilidad esté acotada, es que $\rho > n$. Por (99), tenemos que el consumo en todo tiempo viene dado por:

$$c(t) = c_0 e^{\gamma t} \tag{107}$$

luego

$$c^{1-\theta} = \left(c_0 e^{\gamma t}\right)^{1-\theta} = c_0^{1-\theta} e^{\gamma(1-\theta)t} \tag{108}$$

Sustituyendo (108) en la función de bienestar:

$$\begin{aligned} U &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt = \frac{1}{1-\theta} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(\rho-n)t} c_0^{1-\theta} e^{\gamma(1-\theta)t} dt \\ &= \frac{1}{1-\theta} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left[c_0^{1-\theta} e^{-[\rho-n-\gamma(1-\theta)]t}\right] dt \\ &= \frac{1}{1-\theta} \lim_{b\to\infty} \left\{c_0^{1-\theta} \int_0^b e^{-[\rho-n-\gamma(1-\theta)]t} dt\right\} \end{aligned} \tag{109}$$

Véase que en este punto la acotación de la utilidad se dará siempre que $\rho > n + \gamma(1-\theta)$.[15] Continuando el cálculo, tenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{1-\theta} \lim_{b\to\infty} \left\{-\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)} \left[e^{-[\rho-n-\gamma(1-\theta)]t}\right]_0^b\right\} \\ &= \frac{1}{1-\theta} \lim_{b\to\infty} \left\{-\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)} \left[e^{-[\rho-n-\gamma(1-\theta)]b} - 1\right]\right\} \\ &= \frac{1}{1-\theta} \left\{-\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-[\rho-n-\gamma(1-\theta)]b} - 1\right]\right\} \\ &= \frac{1}{1-\theta} \left[-\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)} (0-1)\right] = \frac{1}{1-\theta} \left[\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)}\right] \end{aligned} \tag{110}$$

Esto es, en términos del consumo inicial, la función de bienestar resulta:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt = \frac{1}{1-\theta} \left[\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)}\right] \tag{111}$$

o también podemos escribirla en dependencia del capital inicial, por la Proposición 1.17,

$$c_0 = [A - (n+\delta+\gamma)]\, k_0 \tag{95}$$

[15] Con más detalle, diremos que para cumplir con $\rho > n + \gamma(1-\theta)$ solo se requiere restringir el parámetro θ a los valores $\theta \geq 1$ (recuerde que de entrada se verifica que $\theta > 0$).

Así, tenemos

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt = \frac{1}{1-\theta} \left\{ \frac{[A-(n+\delta+\gamma)]^{1-\theta} k_0^{1-\theta}}{\rho-n-\gamma(1-\theta)} \right\} \tag{112}$$

con lo cual queda terminado el cálculo.

1.12. GASTO PÚBLICO Y CRECIMIENTO (EL MODELO DE R. BARRO).

En 1990, Robert J. Barro realizó una extensión del modelo AK de Rebelo mediante la participación del gobierno (gasto público). En realidad, en la terminología de los modelos de crecimiento económico, una manera de que el gasto público sea deseable *es introducirlo como argumento (positivo) en la función de producción* (por ejemplo, las carreteras públicas aumentan la producción y la productividad de las empresas privadas; en la misma categoría entrarían la protección policial y judicial que garantiza los derechos de propiedad de las empresas privadas, o el gasto en I+D realizado en universidades públicas). Una segunda manera sería introducir el gasto público directamente en la *función de utilidad* de los consumidores (por ejemplo, los parques nacionales o el gasto en fiestas sociales o bodas reales, que no afectan directamente a la producción, pero sí afectan a la felicidad de las personas que disfrutan directa o indirectamente de dichos parques o eventos sociales). Veamos la descripción del modelo.

1.12.1. SUPUESTOS. Los mismos que en el modelo de Solow–Swan sin progreso técnico ($\dot{A}/A = 0$), con cuatro consideraciones adicionales. La primera, es que la producción depende de las cantidades existentes de dos factores de producción: capital privado, K, y un factor de producción provisto por el sector público, G. La función de producción presenta rendimientos constantes de escala, pero aún existen productividades marginales positivas y decrecientes en cada uno de los factores. En concreto, la función de producción está dada por

$$Y = AK^{\alpha}G^{1-\alpha} \tag{113}$$

donde

$$\begin{aligned} K &= \text{cantidad de capital privado utilizado por las empresas} \\ G &= \text{bien público agregado} \end{aligned}$$

La segunda y tercera consideraciones es que, como en el modelo AK, la tasa de ahorro se determina endógenamente y la tecnología funge como un parámetro tal que $A > 0$. El cuarto aspecto relevante a considerar, tiene que ver con la aplicación de un impuesto al ingreso, τ (por supuesto, $0 < \tau < 1$); de manera que el ingreso o producción disponible es: $Y_d = (1-\tau) AK^{\alpha}G^{1-\alpha}$.[16]

[16] Por último conviene destacar el siguiente detalle importante, antes de resolver el modelo, y tiene que ver con decidir si el bien público es un bien de capital (en el sentido de que debe ser acumulado) o es un input o insumo de producción que debe ser suministrado nuevamente en cada momento del tiempo.

Por ejemplo, las carreteras son un *bien de capital* en el sentido de que el gasto que el estado hace hoy aumenta el stock existente de carreteras disponibles (o repara las carreteras depreciadas), mientras que el

1.12.2. LA DINÁMICA DEL MODELO. Empecemos por definir las variables per cápita:

$$Y = AK^{\alpha}G^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}G^{1-\alpha}}{L} = \frac{AK^{\alpha}G^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}} \Rightarrow y = Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} \tag{114}$$

$$c = \frac{C}{L}; \quad k = \frac{K}{L}; \quad g = \frac{G}{L} \tag{115}$$

Los individuos maximizan la siguiente función de bienestar social (con $\rho > n$):

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt$$

Sujetos a la *restricción presupuestaria para las familias representativas*:

$$\dot{k} = (1-\tau)\, y - c - (n+\delta)\, k \tag{116}$$

que nos dice que la producción obtenida menos la producción pagada al gobierno en forma de impuestos se debe repartir entre consumo e inversión bruta (que, a su vez, es igual a inversión neta, $\dot{k}$, más depreciación, $(\delta + n)\, k$).
Por otro lado, sabemos que el Estado recauda $\tau Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}$ unidades de renta y las transforma en un volumen de bienes públicos, g. De este modo, la *restricción presupuestaria del sector público* puede expresarse como:

$$g = \tau y = \tau Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} \tag{117}$$

Procediendo como en la sección de RCK, podemos probar los siguientes resultados.
PROPOSICIÓN 1.19. Si una economía cumple con los requisitos de la sección 1.12.1, entonces la tasa de crecimiento del consumo per cápita viene dada por:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\delta+\rho)\right] \tag{118}$$

Demostración. El problema a encarar es el siguiente:

$$\text{Maximizar } \; U = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-(\rho-n)t} dt$$

Sujeto a

$$\dot{k} = (1-\tau)\, Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} - c - (\delta+n)\, k \tag{116}$$

Por lo que el *Hamiltoniano* será

$$H(\cdot) = u(c)\; e^{-(\rho-n)t} + \nu\; \dot{k} \tag{66}$$

$$H(\cdot) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}\; e^{-(\rho-n)t} + \nu\; \left[(1-\tau)\, Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} - c - (\delta+n)\, k\right] \tag{119}$$

gasto salarial de la polícia o los jueces en el momento t afecta directamente a la producción del momento t.
De nueva cuenta, seguiremos a Barro (1990) e introduciremos los bienes públicos como flujos productivos y no como bienes de capital acumulables.

Las Condiciones de Primer Orden asociadas son:

$$H_c = 0 \tag{68}$$

$$H_k = -\dot{\nu} \tag{69}$$

Podríamos obviar el trabajo algebraico siguiente, sin embargo y aunque el proceso es muy parecido al de Ramsey, consideramos ilustrativo mostrar el desarrollo completo:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = H_c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\theta}{1-\theta} c^{-\theta} \ e^{-(\rho-n)t} - \nu = 0 \\ \\ c^{-\theta} \ e^{-(\rho-n)t} - \nu = 0 \end{cases} \tag{70}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = H_k = -\dot{\nu} \Leftrightarrow \nu \ \left[(1-\tau)\, \alpha A k^{\alpha-1} g^{1-\alpha} - (\delta + n) \right] = -\dot{\nu} \tag{120}$$

Si tomamos logaritmos en (70), y derivamos respecto al tiempo para obtener la tasa de crecimiento del consumo per cápita:

$$c^{-\theta} \ e^{-(\rho-n)t} - \nu = 0 \Leftrightarrow c^{-\theta} \ e^{-(\rho-n)t} = \nu$$

$$\begin{aligned} \ln c^{-\theta} + \ln e^{-(\rho-n)t} &= \ln \nu \\ -\theta \ln c - (\rho - n)\, t &= \ln \nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[-\theta \ln c - (\rho - n)\, t \right] &= \frac{d}{dt} \left[\ln \nu \right] \\ -\theta \frac{\dot{c}}{c} - (\rho - n) &= \frac{\dot{\nu}}{\nu} \end{aligned} \tag{72}$$

Rearreglando la ecuación (120):

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\nu}}{\nu} &= (1-\tau)\, \alpha A k^{\alpha-1} g^{1-\alpha} - (\delta + n) \\ &\Updownarrow \\ \frac{\dot{\nu}}{\nu} &= (\delta + n) - (1-\tau)\, \alpha A k^{\alpha-1} g^{1-\alpha} \\ &= (\delta + n) - (1-\tau)\, \alpha A k^{-(1-\alpha)} g^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = (\delta + n) - (1-\tau)\, \alpha A \left(\frac{g}{k} \right)^{1-\alpha} \tag{121}$$

Sustituyendo (72) en (121):

$$-\theta \frac{\dot{c}}{c} - (\rho - n) = (\delta + n) - (1-\tau)\, \alpha A \left(\frac{g}{k} \right)^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{1}{\theta}\left[(\delta+n)+(\rho-n)-(1-\tau)\,\alpha A\left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha}\right]\\ &= -\frac{1}{\theta}\left[(\delta+\rho)-(1-\tau)\,\alpha A\left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A\left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha}-(\delta+\rho)\right] \tag{122}$$

Observe que si $y=f(k,g)=Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial k}\,f(k,g)=\alpha Ak^{\alpha-1}g^{1-\alpha}=\alpha Ak^{-(1-\alpha)}g^{1-\alpha}=\alpha A\left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha} \tag{123}$$

Así que también podemos decir que

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\left(\frac{\partial y}{\partial k}\right)-(\delta+\rho)\right] \tag{124}$$

Designaremos de la manera estándar a la tasa de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c=\frac{\dot{c}}{c} \tag{125}$$

De la restricción presupuestaria del Estado, ecuación (117): $g=\tau y=\tau Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}$,

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{g}{y}=\frac{g}{Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}}=\frac{g^{\alpha}}{Ak^{\alpha}}=\frac{1}{A}\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}\\ &\Downarrow\\ \frac{g}{k} &= (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}}\end{aligned} \tag{126}$$

Además

$$\frac{\partial y}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial k}\left(Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}\right)=\alpha Ak^{\alpha-1}g^{1-\alpha}=\alpha Ak^{-(1-\alpha)}g^{1-\alpha} \tag{127}$$

Sustituyendo (126) en (127) y el resultado subsecuente en (122), obtendremos la tasa de crecimiento γ_c como función de los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned}\gamma_c &= \frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A\left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha}-(\delta+\rho)\right]\\ &= \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A\,(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right]\\ &= \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}+1}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right]\end{aligned}$$

$$\gamma_c=\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right] \tag{118}$$

pues $\frac{1-\alpha}{\alpha}+1=\frac{1-\alpha+\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$. Véase que, al quedar γ_c en términos sólo de constantes, entonces la tasa de crecimiento es siempre constante. □

La cuestión siguiente sería ver cómo crecen el resto de las variables, aspecto que abordamos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.20. Si la economía verifica los requisitos de la sección 1.12.1, entonces su tasa de crecimiento es constante e igual a:

$$\gamma=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right] \tag{128}$$

tal que todas las variables per cápita crecen a esa misma tasa:

$$\gamma_y=\gamma_k=\gamma_c=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right] \tag{129}$$

tanto en estado estacionario como en cualquier otro momento (no hay transición dinámica).

Demostración. Como en el modelo AK, recordemos que por definición el consumo es lo que resta tras apartar una fracción s del ingreso para ahorrar $(0<s<1)$, tomando en cuenta que la fracción s sigue siendo constante pero ya no es exógena. Entonces, por propiedades logarítmicas:

$$c=(1-s)\,y\Rightarrow\ln c=\ln(1-s)+\ln y\Rightarrow\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{y}}{y},\ \text{ o bien: }\ \gamma_c=\gamma_y$$

donde

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{y}}{y}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right]$$

Por otro lado, a partir de la función de producción: $y=Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}=Ak^{\alpha}\left[(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}}k\right]^{1-\alpha}=A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}k$, se tiene que:

$$\ln y=\ln\left[A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]+\ln k\Rightarrow\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{k}}{k},\ \text{o lo que es lo mismo: }\ \gamma_y=\gamma_k$$

por transitividad, la prueba está completa. □

Para terminar la sección, analizaremos la estabilidad en el modelo de Robert Barro.

PROPOSICIÓN 1.21. La economía analizada en este modelo tiene una dinámica de tipo repulsor o fuente en el único equilibrio que posee, el origen.

Demostración. Es similar a la realizada en la Proposición 1.18 (modelo AK). La dinámica del capital y el consumo está gobernada por (118) y (142):

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(\delta+\rho)\right]=\gamma \tag{118}$$

$$\dot{k}=\left[(1-\tau)\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}A^{\frac{1}{\alpha}}-(\delta+n)\right]k-c \tag{142}$$

Obsérvese que este sistema que representa la dinámica de la economía, puede escribirse:

$$\dot{c}=\gamma c \tag{130}$$

$$\dot{k} = \lambda k - c \tag{144}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\delta+\rho)\right] > 0 \tag{131}$$

$$\lambda = \frac{\theta\gamma + \rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} - n > 0 \tag{132}$$

Tales desigualdades se cumplen porque, en cuanto a (131), A puede ser tan grande como se quiera pues a final de cuentas es un parámetro que indica niveles de tecnología y su importancia no radica en los valores específicos que tome sino en la comparación de sus valores como parámetro de forma que se pueda decir si hay aumento o reducción en los niveles tecnológicos; así A puede tomar valores tales que

$$A > \left[\frac{\delta+\rho}{(1-\tau)\,\alpha\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right]^{\alpha} \tag{133}$$

y (131) se verifica. En cuanto a (132), podemos verificar su cumplimiento partiendo de la condición:

$$\rho > n + \gamma\,(1-\theta)$$

ya que

$$\rho > n + \gamma - \gamma\theta \Rightarrow \gamma\theta + \rho > n + \gamma \Rightarrow \gamma\theta + \rho > n \Rightarrow \gamma\theta + \rho + \delta\,(1-\alpha) > n$$

$$\Rightarrow \gamma\theta + \rho + \delta\,(1-\alpha) > \alpha n \Rightarrow \gamma\theta + \rho + \delta\,(1-\alpha) - \alpha n > 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\theta\gamma + \rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} - n = \frac{\theta\gamma + \rho + \delta\,(1-\alpha) - \alpha n}{\alpha} > 0 \tag{132}$$

Como puede verse, por (130) y (144), el único punto posible que satisface simultáneamente $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$, es el origen $(0,0)$.
Para determinar la estabilidad de la economía en el equilibrio mencionado, podemos emplear la linealización de la función:

$$F\,(c,k) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} c\gamma \\ \lambda k - c \end{array} \right\} \tag{134}$$

en la vecindad del punto de equilibrio. Por consiguiente, la matriz jacobiana de la aproximación lineal es:

$$
\begin{aligned}
J\left(c^{*},k^{*}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial c} & \frac{\partial F_1}{\partial k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial c} & \frac{\partial F_2}{\partial k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta}\left[\left(1-\tau\right)\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\left(\delta+\rho\right)\right] & 0 \\ -1 & \frac{\theta\gamma+\rho+\delta(1-\alpha)}{\alpha}-n \end{pmatrix} && (135) \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} && (136)
\end{aligned}
$$

y su polinomio característico es:

$$\left(\gamma-X\right)\left(\lambda-X\right)=0 \tag{137}$$

luego, se tienen dos valores propios positivos: $X_1=\gamma$ y $X_2=\lambda$. Luego, el estado estacionario $\left(c^{*},k^{*}\right)=\left(0,0\right)$ es una fuente y, por lo tanto, es un equilibrio inestable. $\square$

A continuación, vamos a desarrollar algunos resultados análogos a los del modelo AK, pero con la intención de utilizarlos para abordar un aspecto más primordial y que queremos enfatizar, pues será de gran valía en el capítulo 4 de esta tesis. El punto en cuestión es si puede determinarse una tasa óptima de impuestos. La pregunta obvia es ¿tasa de impuestos óptima en qué sentido? En el sentido de cuál es la tasa de impuestos que maximiza el crecimiento económico, por un lado, y en el sentido de cuál tasa maximiza el bienestar. Abordamos estos detalles en los dos siguientes resultados.[17]

PROPOSICIÓN 1.22. Si la economía descrita en 1.12.1, tiene una tasa de impuestos τ tal que

$$\tau^{*}=1-\alpha \tag{138}$$

entonces se alcanza la máxima tasa de crecimiento posible, que está dada por:

$$\gamma^{\max}=\gamma_c^{\max}=\frac{1}{\theta}\left[\alpha^2A^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\alpha\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\left(\delta+\rho\right)\right] \tag{139}$$

Demostración. Los puntos críticos de la función $\gamma_c\left(\tau\right)$ se hallan igualando a cero la derivada de la tasa de crecimiento con respecto a τ. Haciendo esto, encontramos que hay uno sólo, dado por

$$\tau^{*}=1-\alpha$$

Para determinar la naturaleza del punto crítico, calculamos la segunda derivada del bienestar y verificamos que es negativa. De esta manera, se dice que τ^{*} maximiza la tasa de crecimiento de la economía.

[17] Es muy importante destacar también que de nueva cuenta, como en la versión AK, el crecimiento económico en el modelo de R. Barro experimenta un constante incremento y, está dado exclusivamente por parámetros definidos al interior del modelo, esto es, el crecimiento se genera de forma endógena.

Citando a Sala–i–Martin (p. 141), "es importante notar que *la ecuación (138) indica que el Estado puede maximizar el crecimiento de la economía, adoptando un tamaño apropiado. Dicho de otro modo, para maximizar la tasa de crecimiento, el gobierno debe escoger su tamaño* τ*, eficientemente.*"
La tasa de crecimiento que resultaría en caso de que el gobierno escoja $\tau^* = 1 - \alpha$, sería

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau^*)\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\,(\tau^*)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\delta+\rho)\right]$$

$$= \frac{1}{\theta}\left\{[1-(1-\alpha)]\,\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\,(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\delta+\rho)\right\} = \frac{1}{\theta}\left\{\alpha\cdot\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\,(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\delta+\rho)\right\}$$

es decir

$$\gamma^{\max} = \gamma_c^{\max} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha^2 A^{\frac{1}{\alpha}}\,(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\delta+\rho)\right]$$

y así terminamos la prueba. □

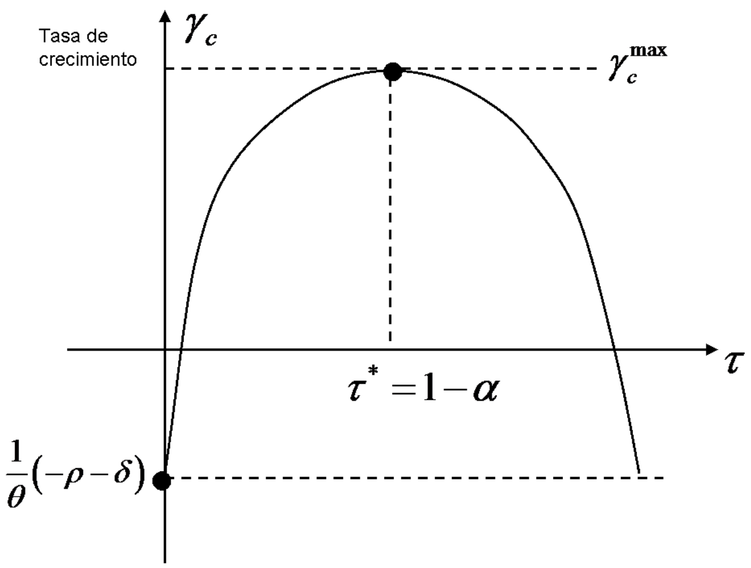

Figura 1.10. Relación entre la tasa de impuestos y la tasa de crecimiento económico en el modelo de gasto público.

Una vez que ha quedado de manifiesto la posibilidad de maximización en la tasa de crecimiento económico, la siguiente pregunta es si acaso esta optimización también es posible para la función de bienestar que describe a nuestra economía. Respondemos esta cuestión en la próxima sección.

1.12.3. EL BIENESTAR. Empecemos por proporcionar algunas relaciones útiles para la determinación de optimalidad en el bienestar de la sociedad.
PROPOSICIÓN 1.23. Para la economía bajo análisis, tal que γ está dado por la expresión (118), y λ es el coeficiente de k en la inversión neta per cápita $(\dot{k})$, entonces λ puede escribirse como una función de γ:

$$\lambda = \frac{\theta\gamma + \rho + \delta\left(1-\alpha\right)}{\alpha} - n \tag{140}$$

Demostración. Retomemos la ecuación de inversión per cápita

$$\dot{k} = \left(1-\tau\right) A k^{\alpha} g^{1-\alpha} - c - \left(\delta + n\right) k \tag{116}$$

Si hacemos uso de que $g = \tau y$, tal que

$$\frac{g}{k} = \left(\tau A\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{126}$$

entonces

$$g = \tau^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} k \tag{141}$$

Sustituyendo (141) en (116):

$$\dot{k} = \left(1-\tau\right) A k^{\alpha} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k^{1-\alpha} - c - \left(\delta + n\right) k$$

$$\dot{k} = \left(1-\tau\right) \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} k - c - \left(\delta + n\right) k \tag{142}$$

pues

$$1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha + 1 - \alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

Continuando con el cálculo, podemos agrupar los términos en el capital:

$$\dot{k} = \left[\left(1-\tau\right) \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\delta + n\right)\right] k - c \tag{143}$$

$$\dot{k} \equiv \lambda k - c \tag{144}$$

En la Proposición 1.19, hemos realizado el mismo procedimiento pero con la tasa de crecimiento del consumo (usando también $g = \tau^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} k$):

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\left(1-\tau\right) \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \left(\delta + \rho\right)\right] = \gamma \tag{118}$$

Note entonces que podemos relacionar entre sí a las constantes λ y γ de la siguiente manera. Por un lado, respecto a λ podemos rearreglar:

$$\lambda = \left(1-\tau\right) \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\delta + n\right) \Leftrightarrow \lambda + \delta + n = \left(1-\tau\right) \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} \tag{145}$$

Después, podemos reescribir:

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[\left(1-\tau\right) \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \left(\delta + \rho\right)\right] = \frac{1}{\theta}\left[\left(\lambda + \delta + n\right)\alpha - \left(\delta + \rho\right)\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left\{\left(\lambda + n\right)\alpha - \left[\rho + \delta\left(1-\alpha\right)\right]\right\} \tag{146}$$

Entonces

$$\theta\gamma = (\lambda + n)\,\alpha - [\rho + \delta\,(1-\alpha)] \Leftrightarrow \frac{\theta\gamma + \rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} = \lambda + n$$

Por tanto, podemos concluir:

$$\lambda = \frac{\theta\gamma + \rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} - n \tag{140}$$

que es la relación buscada entre la tasa de crecimiento γ y el coeficiente λ.
PROPOSICIÓN 1.24. Para la economía bajo análisis, los niveles iniciales de consumo y de capital por trabajador, guardan la siguiente relación:

$$c_0 = (\lambda - \gamma)\,k_0 \tag{147}$$

donde

$$\lambda - \gamma = \left[\frac{\rho + \delta\,(1-\alpha) - (\alpha - \theta)\,\gamma}{\alpha}\right] - n \tag{148}$$

Demostración. Por la Proposición 1.20, la inversión neta $\dot{k}$ es igual a γk. Es decir

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma \Rightarrow \dot{k} = \gamma k$$

Como parte de los cálculos intermedios en la proposición anterior, sabemos que

$$\dot{k} \equiv \lambda k - c \tag{144}$$

luego

$$\gamma k = \lambda k - c \tag{149}$$

entonces

$$c = (\lambda - \gamma)\,k \tag{150}$$

En el inicio ($t = 0$),

$$c_0 = (\lambda - \gamma)\,k_0 \tag{147}$$

Además, por la Proposición 1.22:

$$\lambda - \gamma = \left[\frac{\theta\gamma + \rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} - n\right] - \gamma \tag{151}$$

$$= \frac{\theta\gamma - \alpha\gamma}{\alpha} + \left[\frac{\rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} - n\right] = -\frac{(\alpha - \theta)\,\gamma}{\alpha} + \left[\frac{\rho + \delta\,(1-\alpha)}{\alpha} - n\right]$$

$$\lambda - \gamma = \left[\frac{\rho + \delta\,(1-\alpha) - (\alpha - \theta)\,\gamma}{\alpha}\right] - n \tag{148}$$

y esto es lo que queríamos demostrar.[18] □

[18] Es suficiente con que $\theta \geq 1$ para que el término entre corchetes sea positivo

Con estas dos herramientas, podemos abordar el resultado principal de esta sección.
PROPOSICIÓN 1.25. Si la economía descrita en 1.12.1, tiene una tasa de impuestos τ tal que

$$\tau^* = 1 - \alpha \tag{138}$$

entonces se alcanza el máximo bienestar social posible.
Demostración. Efectuemos el cálculo de la función de bienestar de la sociedad descrita por este modelo:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

Obsérvese que un primer requisito para que la utilidad esté acotada, es que $\rho > n$. Por (118) y (130), tenemos que el consumo en todo tiempo viene dado por:

$$c(t) = c_0 e^{\gamma t} \tag{152}$$

luego

$$c^{1-\theta} = \left(c_0 e^{\gamma t}\right)^{1-\theta} = c_0^{1-\theta} e^{\gamma(1-\theta)t} \tag{153}$$

Sustituyendo (153) en la función de bienestar:

$$U = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt = \frac{1}{1-\theta} \lim_{b\to\infty} \left\{ c_0^{1-\theta} \int_0^{b} e^{-[\rho-n-\gamma(1-\theta)]t} dt \right\}$$

Como ha ocurrido anteriormente, véase que para asegurar que la utilidad esté acotada se requiere que $\rho > n+\gamma(1-\theta)$.[19] Resolviendo la integral y el límite correspondientes, tenemos

$$U = \frac{1}{1-\theta} \left[\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)} \right]$$

Es decir, en términos del consumo inicial, la función de bienestar resulta:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt = \frac{1}{1-\theta} \left[\frac{c_0^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)} \right] \tag{154}$$

Tratemos de escribir esta función de bienestar en términos de γ, la tasa de crecimiento de la economía. Para tal fin, retomemos (147) y (148) de la Proposición 1.23.

$$c_0 = (\lambda - \gamma) k_0 \tag{147}$$

$$\lambda - \gamma = \left[\frac{\rho + \delta(1-\alpha) - (\alpha - \theta)\gamma}{\alpha} \right] - n \tag{148}$$

luego

[19] Ver la misma nota al respecto en el modelo AK. De entrada, basta con que $\theta \geq 1$, para que se cumpla con $\rho > n + \gamma(1-\theta) > 0$. Con más exactitud, diremos que $\theta > 1$, porque si $\theta = 1$ tenemos una indeterminación en $\frac{1}{1-\theta}$.

$$U(\gamma) = \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{(\lambda-\gamma)^{1-\theta}\, k_0^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)}\right] \tag{155}$$

y finalmente:

$$\begin{aligned}
U(\gamma) &= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{k_0^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)}\right]\left\{\left[\frac{\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma}{\alpha}\right]-n\right\}^{1-\theta} \\
&= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{k_0^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)}\right]\left[\frac{\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma-\alpha n}{\alpha}\right]^{1-\theta} \\
&= \frac{k_0^{1-\theta}}{\alpha^{1-\theta}}\frac{1}{1-\theta}\left[\frac{1}{\rho - n - \gamma(1-\theta)}\right]\left[\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma-\alpha n\right]^{1-\theta}
\end{aligned}$$

$$U(\gamma) = \frac{\phi}{1-\theta}\cdot\frac{\left[\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma-\alpha n\right]^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)} \tag{156}$$

donde

$$\phi = \frac{k_0^{1-\theta}}{\alpha^{1-\theta}} = \left(\frac{k_0}{\alpha}\right)^{1-\theta} > 0 \tag{157}$$

La cuestión relevante aquí es ¿cómo se comporta $U(\gamma)$ ante cambios en γ? Veámoslo. Derivando (156), respecto a γ, se tiene:

$$U\,'(\gamma) = \frac{\phi}{1-\theta}\frac{d}{d\gamma}\left\{\frac{\left[\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma-\alpha n\right]^{1-\theta}}{\rho - n - \gamma(1-\theta)}\right\} \tag{158}$$

$$U\,'(\gamma) = \frac{\phi\,[\cdots]^{-\theta}}{\left[(\rho-n)-\gamma(1-\theta)\right]^2}\left\{[\cdots]-(\alpha-\theta)\left[(\rho-n)-\gamma(1-\theta)\right]\right\} \tag{159}$$

donde para simplificar estamos empleando

$$[\cdots] = \left[\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma-\alpha n\right] \tag{160}$$

Realizando la resta en el numerador:

$$[\cdots]-(\alpha-\theta)\left[(\rho-n)-\gamma(1-\theta)\right] = \text{numerador}$$

$$\text{numerador} = \left[\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)\gamma-\alpha n\right]-(\alpha-\theta)\left[(\rho-n)-\gamma(1-\theta)\right]$$

$$= (1-\alpha+\theta)\rho+\delta(1-\alpha)-(\alpha-\theta)(1-1+\theta)\gamma+(\alpha-\theta-\alpha)n$$

$$\text{numerador} = (1-\alpha+\theta)\rho+\delta(1-\alpha)+(\theta-\alpha)\theta\gamma-\theta n$$

Por último

$$\text{numerador} = (1-\alpha)\rho+\delta(1-\alpha)+(\theta-\alpha)\theta\gamma-\theta n+\theta\rho$$

Así, para que $U'(\gamma) > 0$, se requiere

$$[\cdots] - (\alpha - \theta)[(\rho - n) - \gamma(1-\theta)] > 0$$

$$[\cdots] > (\alpha - \theta)[(\rho - n) - \gamma(1-\theta)]$$

$$\rho + \delta(1-\alpha) - (\alpha - \theta)\gamma - \alpha n > (\alpha - \theta)[(\rho - n) - \gamma(1-\theta)] \tag{161}$$

y esta última expresión se cumple por la condición de acotabilidad: $(\rho - n) - \gamma(1-\theta) > 0$ y con $\alpha > \theta$. Verifiquémoslo:
En primer lugar, sabemos que $\rho - n > 0$ y $\alpha \in (0,1) \Rightarrow \rho - \alpha n > \rho - n > 0$. Además,

$$\delta(1-\alpha) > 0 \text{ pues } \delta \in (0,1)$$

$$(\alpha - \theta)\gamma < 0 \text{ pues } \theta > 1 \text{ y } \gamma > 0$$

Nótese que también: $-(\alpha - \theta)\gamma > 0$. Luego,

$$\rho + \delta(1-\alpha) - (\alpha - \theta)\gamma - \alpha n > 0$$

mientras que

$$0 > (\alpha - \theta)[(\rho - n) - \gamma(1-\theta)]$$

Así, podemos afirmar que

$$\rho + \delta(1-\alpha) - \gamma(\alpha - \theta) - \alpha n > (\alpha - \theta)[(\rho - \alpha n) - \gamma(1-\theta)] \tag{161}$$

como indicábamos en líneas anteriores.
Por tanto, como la utilidad se incrementa con la tasa γ de crecimiento económico ($U'(\gamma) > 0$), entonces el gobierno debe elegir τ tal que γ sea máxima. Pero atención, esta máxima tasa de crecimiento ($\gamma^{\max}$) ya la determinamos en la Proposición 1.22, de manera que la tasa de impuesto ($\tau^* = 1 - \alpha$) que optimiza el crecimiento económico, también va a maximizar el bienestar de la sociedad aquí considerada. $\square$

1.13. OTROS ENFOQUES.

En las páginas anteriores, hemos visto algunos ejemplos del enfoque dominante de la teoría del crecimiento económico en los últimos años. Sin embargo y como justificación de la presente sección, podemos decir que este capítulo introductorio carecería de niveles mínimos de suficiencia si se ignorara lo que autores ajenos a la corriente principal también han aportado al desarrollo de la teoría. Veamos algunos casos brevemente.
En una de sus dos importantes aportaciones a la economía matemática,[20] en 1937 John Von Neumann propuso una visión propia del proceso de crecimiento económico que si bien despertó expectativas algunos años después de su aparición, éstas no han mantenido hasta

[20] Su otra aportación y más trascendente aún fue proponer a la Teoría de Juegos como el verdadero cimiento de la economía.

nuestros días tantos seguidores como sí ocurrió con otros enfoques no ortodoxos. En este estudio, Von Neumann utilizó un sistema lineal de producción y demostró la existencia de una máxima tasa de crecimiento y que ésta era alcanzable con la tecnología especificada, otorgando un papel principal a las industrias (procesos y bienes) más que a las familias (trabajo y consumo). Este enfoque pionero ha servido como fundamento para teorías del crecimiento económico desarrolladas en el marco del equilibrio general, esto es, analizando a la economía en su conjunto pero incorporando un alto grado de desagregación de los bienes, en claro contraste con la agregación presente en los modelos neoclásicos. En este sentido, Michio Morishima ha sido considerado como el principal continuador de la aproximación al crecimiento realizada por Von Neumann.

Por otro lado, el primer modelo realmente popular que podríamos considerar ajeno a los enfoques neoclasico y endógeno dominantes, es curiosamente uno que antecedió por relativamente poco tiempo a la propuesta de Solow–Swan y que mencionamos ligeramente al principio del capítulo: el modelo de Harrod–Domar, que en realidad son dos. En la actualidad, este modelo se suele enseñar en el marco de la versión neoclásica estándar y se distingue del enfoque de Solow únicamente en la función de producción, que se asume como de proporciones fijas o función de producción de Leontief, la cual no cumple con las propiedades de la función de producción neoclásica. Solow mismo afirmó en su artículo seminal que la fuente principal de los resultados de Harrod–Domar provenían de la elección de su tecnología productiva. En realidad esto es erróneo: con insistencia se ha señalado que las diferencias entre Solow–Swan y Harrod–Domar provienen de la carencia en unos y la presencia en otros de una función de inversión plenamente definida más que de la conveniente elección de una función de producción; sin embargo, el error ha persistido en la biliografía dominante y más aún se ha olvidado que realmente las concepciones del crecimiento contenidas en las propuestas originales de Roy Harrod (1939) y Evsey Domar (1946) son distintas aunque guardan similitudes, pues a final de cuentas ambos autores trataron de incorporar en un marco dinámico las principales ideas de Keynes.

El siguiente modelo típicamente contrario a las teorías neoclásica y endógena dominantes, es el de Nicholas Kaldor (1957). Este autor propuso un modelo de crecimiento en el que prescinde de una función de producción a la manera neoclásica, y centra su atención en la distribución del ingreso entre capitalistas y trabajadores. Kaldor, a diferencia de Solow–Swan, encontró que la inversión sí era relevante para el crecimiento a largo plazo (tal como fue "redescubierto" después en la vertiente endógena), al postular una relación particular entre progreso técnico e inversión.

Otro enfoque no ortodoxo relativamente popular (pero más reciente) es el de la teoría del crecimiento económico restringido por la balanza de pagos (o teoría BPC por sus siglas en inglés), debida a Anthony P. Thirlwall y colaboradores. En esta corriente de pensamiento, se considera que la teoría neoclásica y los modelos endógenos "están demasiado orientados hacia la oferta y no reconocen suficientemente las diversas restricciones de la demanda que operan antes que las restricciones de la oferta".[21] En concreto, el énfasis aquí está dirigido a economías abiertas cuya disponibilidad de divisas vía exportaciones relaja o tensiona la balanza de pagos, lo que a su vez restringe a la demanda, que en esta versión sí tiene un papel determinante en el crecimiento económico.

En realidad, ha habido más aproximaciones al crecimiento económico de las que hemos

[21] Thirlwall (2003), p. 40.

mencionado aquí, omitidas por razones de espacio y porque nos alejaría de los objetivos de esta tesis. Dentro de las que destacan, se encuentran: 1) Luigi Pasinetti, quien corrige un aparente desliz en la lógica subyacente en la presentación de Kaldor de 1957; 2) Walt W. Rostow y lo que se conoció como la teoría del "despegue hacia el crecimiento sostenido";[22] 3) Dennis L. Meadows y el Club de Roma al establecer los llamados límites del crecimiento (1975) utilizando dinámica de sistemas;[23] por citar algunos exponentes principales.

Capítulo 2. Dinámica Laboral.

Por lo general, los modelos de crecimiento económico hacen supuestos muy simples respecto a la dinámica que rige la variación de la fuerza laboral. En concreto, se adoptan dinámicas poblacionales de corte malthusiano o incluso se postula que el tamaño poblacional permanece constante. Pese a ello, muy recientemente se han tratado de incorporar enfoques no malthusianos, aunque en la práctica, cuando se trata de verificar econométricamente los modelos en boga, no se exploran otras dinámicas para describir la evolución de la mano de obra en los modelos de crecimiento económico. ¿Qué es lo que se pierde y qué es lo que se gana al emplear este enfoque simplificador? En esta sección, revisaremos los esfuerzos previos para relajar el supuesto de crecimiento exponencial como descripción de la fuerza laboral, y abordaremos un par de variantes no malthusianas con la intención de responder a esta pregunta y, para ello, se hará uso del marco teórico propuesto por Solow. Así, estudiaremos dos modelos –ambos más realistas– para analizar el efecto que la versión demográfica escogida tiene en el comportamiento del PIB por individuo a corto y sobretodo a largo plazo. En este sentido, los modelos poblacionales aquí abordados son de tipo no estándar, respecto a los encontrados comúnmente en la literatura. Se muestran las consecuencias de introducir ambas descripciones de la fuerza laboral en la versión original solowiana.

2.1. ANTECEDENTES.

Ya desde su artículo seminal, Robert Solow comentaba la posible existencia de múltiples estados estacionarios no triviales cuando la tasa de variación de la mano de obra era función del capital per cápita:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n(k) \quad \text{tal que} \quad \dot{k} = sf(k) - [n(k) + \delta] k \tag{162}$$

Siguiendo a Solow (1956), supongamos que a niveles muy bajos del ingreso per cápita y^*, la población laboral tiende a disminuir; para niveles de ingreso más elevados, la población empieza a aumentar; y luego, para ingresos aún más elevados, la tasa de crecimiento demográfico n, se estanca y empieza a declinar. El resultado se aprecia en las Figuras 2.1 y 2.2.

[22] Rostow (1961) y Krugman (2000), p. 36 y 37.
[23] Meadows (1975, 1993).

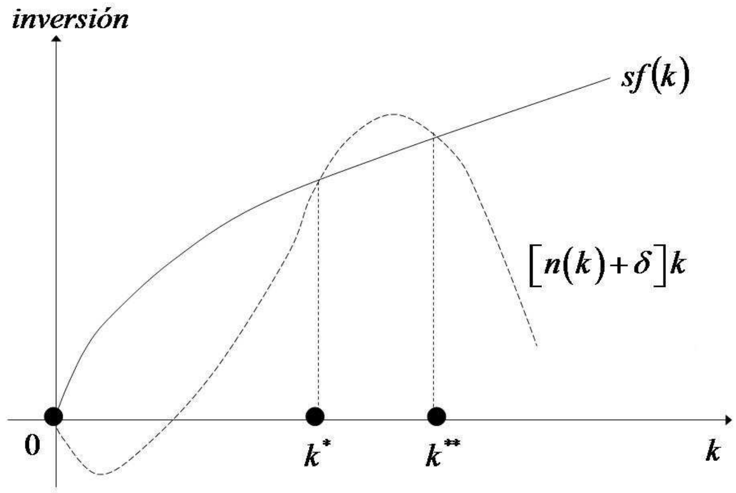

Figura 2.1. Diagrama de Solow para una población variable.

Podemos ver que en contraste con el rayo de la Figura 1.2, ahora $n + \delta$ es curvo, con una forma dependiente de la relación existente entre el crecimiento demográfico y el ingreso real. En cuanto a los estados estacionarios, ahora hay dos no triviales, k^* y k^{**}. El primero es dinámicamente estable pero k^{**} es inestable.[24] Si $k^* < k_0 < k^{**}$, la economía convergerá a k^*. Pero, si $k_0 > k^{**}$, se iniciará una expansión autogenerada del ingreso y el capital por unidad eficiente de trabajo.

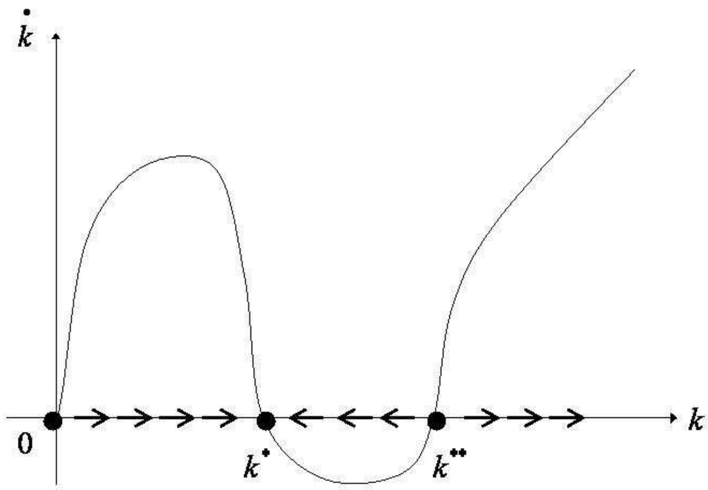

Figura 2.2. Plano-Fase asociado a la población variable de la Figura 2.1.

[24] Respecto a k^*, se tiene que si $0 < k_0 < k^* : sf(k) > [n(k) + \delta] k \Rightarrow \dot{k} > 0$; si $k^* < k_0 < k^{**} : sf(k) < [n(k) + \delta] k \Rightarrow \dot{k} < 0$. Respecto a k^{**}, retomamos que en $k^* < k_0 < k^{**} : \dot{k} < 0$ y además notamos que si $k^{**} < k_0 : sf(k) > [n(k) + \delta] k \Rightarrow \dot{k} > 0$.

En realidad, Solow abordó esta posible dinámica laboral sólo con el objetivo de mostrar escenarios en los que podrían presentarse resultados diferentes al estado estacionario no trivial, estable y único que describimos en el capítulo precedente. No tenía una intención de generalizar su modelo o hacerlo más realista al introducir una dinámica poblacional más acorde con las estadísticas demográficas nacionales.
Por otro lado, el trabajo de Solow estuvo influido por una aportación previa de Haavelmo, con características en parte similares a su enfoque dinámico continuo, pero que esencialmente se trató de un trabajo más de corte mecanicista en el sentido de que su objetivo era proponer formas funcionales plausibles, y no tan enfocado al desarrollo de una teoría económica como tal. En su libro, "A Study in the Theory if Economic Evolution", T. Haavelmo da una serie de modelos tendientes a describir la evolución económica de un país o región, mediante sistemas de ecuaciones diferenciales que ligan cuatro factores económicos fundamentales: población (L), capital (K), producto (Y) y un cuarto factor que llama nivel de conocimiento tecnológico (A). Se da un repertorio de modelos que varían según las condiciones del problema y el tipo de funciones que se utilice; un ejemplo es el de una economía descrita por el siguiente sistema:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \alpha - \beta \frac{L}{Y} \tag{163}$$

$$Y = a_1 L + a_2 K \tag{164}$$

$$\dot{K} = b_1 Y + b_2 L + b_3 K \tag{165}$$

En este modelo, el crecimiento poblacional está en parte determinado por el nivel de producción (o ingreso) que la región puede proporcionar, y no sólo por la tasa natural malthusiana. Por el lado de la producción y de la acumulación de capital, vemos que están determinados por la cantidad de mano de obra y de capital disponible pero bajo formas funcionales en desuso. La parte a destacar por nosotros, tiene que ver con el hecho de que hay más trabajadores cuanto más crece el ingreso per cápita disponible, según (163).
Otro esquema del mismo autor, preserva la dinámica de las ecuaciones (164) y (165), pero incorpora dos diferentes influencias en el crecimiento de la mano de obra: el caso cuando la tasa de nacimientos varía inversamente con el nivel de conocimientos tecnológicos, A, y directamente con la cantidad disponible de capital; lo anterior expresado como sigue:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\alpha}{1 + \sigma A} - \beta \frac{L}{K} \tag{166}$$

De manera adicional, se asume que el nivel de conocimientos técnicos varía de forma directamente proporcional con el capital por trabajador:

$$A = \mu \frac{K}{L} + \mu_0 \tag{167}$$

Esta descripción de la mano de obra asocia a las regiones tecnológicamente más avanzadas con una fuerza laboral menor, y viceversa: las naciones tecnológicamente rezagadas tenderán a tasas de natalidad mayores. Además, en el modelo se otorga un efecto positivo al nivel de capital por trabajador, i.e. entre más capital acumula un trabajador, mayor es su tasa de reproducción.

Tanto en este segundo esquema (ecuaciones (163) a (165)), como en el primero (ecuaciones (164) a (167)), Haavelmo se limitó a mostrar las condiciones de estabilidad de los estados estacionarios asociados.
Como puede verse, al haber sido una obra presentada antes de la propuesta de Solow–Swan, en el trabajo de Haavelmo se permite una mayor variedad en el comportamiento de, por ejemplo, las funciones de producción y la variación del capital, enfoque que en esta tesis identificamos simplemente como Pre–Solow (véase cuadro 2.1), pero en el que ya pueden verse algunos intentos de endogeneizar la dinámica laboral y no simplemente asumirla como exponencial o malthusiana.
Varios años después de la versión de Solow–Swan, en 1977, Paul Robertson y Stanislaw Wellisz realizaron la extensión quizá más sencilla posible de la dinámica laboral mediante la incorporación de un término de migración laboral, en el marco de un modelo neoclásico de dos sectores: uno agrícola y otro urbano:

$$\begin{aligned} \dot{L}_a &= n_a L_a - M \\ \dot{L}_u &= n_u L_u + M \end{aligned} \tag{168}$$

donde M es el número de migrantes de un sector a otro, n_i es la tasa de crecimiento natural y los subíndices a y u, indican el sector correspondiente (agrícola o urbano, respectivamente). El objetivo de este trabajo estaba dirigido al análisis de la brecha salarial existente entre sectores, y en el desarrollo del mismo no fue necesario determinar explícitamente el estado estacionario de la economía, más bien éste se analizó de forma gráfica. De manera que, aunque se realizó un relajamiento de la hipótesis de crecimiento laboral malthusiano, este tema no era el punto central de la investigación y no se obtuvieron trayectorias temporales completas ni una expresión explícita del estado de equilibrio.
Más recientemente, en 2003, Scarpello y Ritelli, sí se enfocaron en el efecto de dinámicas poblacionales alternativas sobre el crecimiento. Escogieron una versión logística o de Verhulst para describir la variación de la fuerza laboral, e integraron de forma cerrada la ecuación fundamental de Solow vía la función hipergeométrica ${}_2F_1$. Los autores encontraron que el supuesto verhulstiano de crecimiento laboral induce una dinámica más lenta en el sistema, pero se conserva la estabilidad.
A partir de este reporte se ha iniciado una avalancha de desarrollos complementarios y/o alternativos para explorar a profundidad el efecto de relajar la hipótesis malthusiana en el modelo de Solow–Swan, como se resume en el cuadro 2.1.
Un comentario especial merece la presentación que Barro y Sala–i–Martin hacen sobre el impacto de la migración. En realidad, parten de una investigación anterior debida a Braun (1993), que consta de analizar ciertamente los efectos migratorios pero considerando fundamentalmente que la migración también implica la movilidad de capital humano, siendo esta movilidad de capital más relevante en el análisis.
En esta tesis no se está en desacuerdo con esta aproximación que de hecho podría ser más completa. Sin embargo, dicha línea de investigación se aparta de lo que es nuestro punto de interés: las implicaciones de la elección del comportamiento laboral en el modelo de Solow–Swan, sin efectos asociados como la movilidad o no de algunas formas de capital.
Del resto de los trabajos que comprenden el área analizada en este capítulo, podemos ver que hay una tendencia a abordar dinámicas laborales no estándar como la propia logística, la de von Bertalanffy

$$L(t) = L_\infty - (L_\infty - L_0)\, e^{-rt} \tag{169}$$

que es solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{L} &= r\,(L_\infty - L) \\ L(0) &= L_0 \end{aligned} \tag{170}$$

donde L_∞ es la capacidad de carga del ambiente, y r es una constante que determina la velocidad con la que la fuerza laboral alcanza la asíntota L_∞; o la ley de Richards, que es una generalización de von Bertalanffy:

$$L(t) = \frac{L_\infty}{\left(1 + e^{d-\delta r t}\right)^{\frac{1}{\delta}}} \tag{171}$$

donde

$$d = \ln\left[\left(\frac{L_\infty}{L_0}\right)^{\delta} - 1\right] \tag{172}$$

y que resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{L} &= rL\left[1 - \left(\tfrac{L}{L_\infty}\right)^{\delta}\right] \\ L(0) &= L_0 \end{aligned} \tag{173}$$

Estas investigaciones, ya sea en el marco de Solow o de Ramsey, tienen un marcado interés en el estado estacionario (estabilidad, determinación explícita del mismo, demostración de existencia y unicidad, etc.). Obsérvese que la mayor parte de estos trabajos fueron desarrollados por E. Accinelli y J. G. Brida.

Un aspecto también destacable es la casi nula modelación de la tecnología como factor productivo, y la frecuente ausencia como elemento a considerar en el crecimiento económico. La razón más obvia de esto, radica en que este hecho funge como simplificación al enfatizar cada uno de los comportamientos propuestos en la mano de obra. En este capítulo, se tomará en cuenta al avance tecnológico como un factor determinado exógenamente, para abordar su posible modelación con más detalle en el tercer capítulo.

Por último, destacamos en esta breve revisión el trabajo de Pieretti y Zou (2007), en particular por su relación con este trabajo de tesis. Pieretti y Zou realizaron una extensión a la versión solowiana del crecimiento, mediante el análisis de una fuerza laboral agregada que permite la emigración. En concreto, consideran una población consistente de trabajadores no calificados (N, con tasa de crecimiento exógena $n_N \geq 0$) y que no emigran, y de trabajadores calificados (R) que son potenciales emigrantes. Los autores denotan por E el flujo de emigración. La tasa natural de crecimiento de la mano de obra calificada está dada de forma exógena por n_R. El movimiento de la mano de obra calificada se expresa como sigue: $\dot{R} = n_R R - E$, por lo que la tasa de crecimiento de la fuerza laboral calificada que no emigra está dada por

$$\frac{\dot{R}}{R} = n_R - \frac{E}{R} \tag{174}$$

Finalmente, se asume que la fuerza laboral combinada está gobernada por la siguiente función tipo CES:

$$L = \left[bR^{-\beta} + (1-b)\,N^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}}, \qquad -1 < \beta < \infty \tag{175}$$

donde el parámetro $b \in (0,1)$ cambia en la medida que el parámetro de sustitución β varía entre -1 e ∞. Pieretti y Zou encuentran que hay formas de evadir la estabilidad asintótica típica de Solow–Swan y derivan una caracterización analítica de la dinámica de transición del modelo. Esta investigación y la desarrollada por Robertson y Wellisz son antecedentes directos del trabajo a realizar en la sección 2.3 de esta tesis, mientras que en el apartado 2.4 se complementa la investigación de Scarpello y Ritelli.

En perspectiva, y como conclusión de esta sección, podemos ver que los trabajos desarrollados en torno a la relajación del supuesto malthusiano en la dinámica laboral, generalmente carecen de la determinación de soluciones cerradas o de trayectorias temporales completas (i.e. la dinámica de transición), mientras que el análisis del estado estacionario suele ocupar todo el esfuerzo de investigación. En esta tesis, se pretende abordar esa área de oportunidad para tener el esquema completo en algunas de las diferentes versiones no malthusianas que pueden ensayarse para generalizar o mejorar el modelo de crecimiento económico de Solow–Swan.

2.2. MALTHUS EN EL MODELO DE SOLOW–SWAN.

Recordemos que en el modelo de Solow (y en la mayor parte de la literatura), la tasa de natalidad está dada por:

$$\frac{\dot{L}}{L} = a \tag{176}$$

donde $a > 0$. Si empleamos una función de producción específica, por ejemplo la de Cobb–Douglas (con progreso técnico aumentador del trabajo):

$$Y = K^{\alpha}\,(AL)^{1-\alpha} \Rightarrow y = k^{\alpha} \tag{177}$$

entonces podemos obtener una solución cerrada para el capital y por ende para la producción por unidad de eficiencia laboral:

$$y\,(t) = \left[\frac{s}{a+g+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{a+g+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(a+g+\delta)t}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{178}$$

que en el largo plazo, origina la siguiente expresión de estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} y\,(t) = y^{*} = \left[\frac{s}{a+g+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{179}$$

Utilizaremos estos dos últimos resultados (ecuaciones (178) y (179)) para su comparación con otras tasas de evolución laboral.

Para empezar, recordemos los supuestos en los que se basa el modelo malthusiano de crecimiento poblacional:

1. El espacio es ilimitado (no hay restricciones en el espacio que ocupa la población);

2. Los recursos son ilimitados (i.e. se asume la ausencia de restricciones en alimentos, fuentes de energía, etc.);
3. El medio es homogéneo (los recursos están distribuidos de manera homogénea);
4. La población está aislada (en el sentido de que no hay depredadores ni tampoco parásitos);
5. La población está cerrada (no hay emigración ni tampoco inmigración); y
6. La población es homogénea (los individuos son indistinguibles entre sí).

De manera que, las consecuencias del modelo de Malthus, sólo son aceptables si se cumplen las premisas anteriores. El problema es que es muy difícil encontrar ejemplos en la realidad que verifiquen los siete supuestos (quizá las bacterias en un vaso de Petri y eso durante un lapso breve de tiempo nada más). Por mucho, la población humana no verifica el escenario malthusiano, de manera que se vuelve urgente un modelo de crecimiento económico que incorpore una dinámica poblacional más apropiada para describir la población humana y por ende la laboral, pues se asume que la segunda es una fracción de la primera y hereda su dinámica.

De esta forma, si relajamos algunos supuestos (uno por cada vez) se obtienen diferentes dinámicas poblacionales, que de hecho son más complejas pero también más realistas, en particular para poblaciones humanas. Esto es lo que haremos a continuación.

2.3. CRECIMIENTO EXPONENCIAL CON EMIGRACIÓN.

Es de esperarse que un cambio en las hipótesis malthusianas modifique el escenario original de Solow–Swan. En esta sección, analizaremos los efectos de relajar el quinto supuesto de Malthus, es decir nos plantearemos qué pasa cuando tomamos en cuenta la migración laboral que sufre la economía, de manera que la trayectoria temporal de la mano de obra está regida por (180) y ya no por (176), donde:

$$\dot{L} = aL - E \Rightarrow n(t) = \frac{\dot{L}}{L} = a - \frac{E}{L} \tag{180}$$

con $a, E > 0$ y tal que $E = cte.$ es el parámetro que representa la emigración; nótese también que la solución general de (180), es

$$L(t) = \frac{E}{a} + \left(L_0 - \frac{E}{a}\right) e^{at} \tag{181}$$

donde $L(0) = L_0$ representa la población inicial. Con esto en consideración, podemos formular la siguiente

PROPOSICIÓN 2.1. Bajo una función de producción Cobb–Douglas ($y = k^{\alpha}$), en el marco del modelo de Solow con progreso técnico exógeno y aumentador del trabajo, y una dinámica laboral con emigración descrita por la ecuación (180), la trayectoria temporal del producto por unidad eficiente de trabajo está gobernada por:

$$y(t) = \left[\frac{1}{\left(\frac{L_0 a}{E} - 1\right) + e^{-at}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{se^{-at}}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{L_0 a}{E} - 1\right)}{a+g+\delta} + \\ \left[\left(\frac{L_0 a}{E}\right) k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{g+\delta} - \frac{s\left(\frac{L_0 a}{E} - 1\right)}{a+g+\delta} \right] e^{-(1-\alpha)(a+g+\delta)t} \end{array} \right\} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{182}$$

Demostración. Sustituyendo el modelo demográfico (180) en la ecuación de acumulación de capital:

$$\dot{k} = sf(k) - \left(\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{L} + \delta\right)k = sf(k) - \left(\frac{\dot{L}}{L} + g + \delta\right)k$$

se obtiene

$$\dot{k} = sf(k) - \left(a - \frac{E}{L} + g + \delta\right)k \tag{183}$$

y usando $y = k^{\alpha}$,

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - \left(a - \frac{E}{L} + g + \delta\right)k \tag{184}$$

Si utilizamos la siguiente reexpresión del término laboral originalmente expresado por (181):

$$L(t) = \frac{E}{a}\left[1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}\right] \tag{185}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{L} = \frac{a}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}} \tag{186}$$

Sustituyendo (186) en (183):

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - \left[a - \frac{a}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}} + g + \delta\right]k$$

$$\dot{k} + \left\{g + \delta + a\left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}}\right]\right\}k = sk^{\alpha} \tag{187}$$

La anterior es una ecuación diferencial de Bernoulli, con forma general:

$$\dot{k} + R(t)k = V(t)k^{m} \tag{188}$$

donde

$$m = \alpha$$

$$R(t) = g + \delta + a\left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}}\right]$$

$$V(t) = s$$

la cual, podemos linealizar mediante el cambio de variable $z = k^{1-\alpha}$, obteniendo así la siguiente expresión:

$$\dot{z} + (1-\alpha)\left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}}\right]z = (1-\alpha)s \tag{189}$$

que es más sencilla de resolver dada su naturaleza lineal y orden uno. Por el método del factor de integración y con un poco de trabajo algebraico adicional, tenemos que la solución de (189), es:

$$z(t) = \frac{s}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}} \left[\frac{1}{g+\delta} + \frac{\left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}}{g+\delta+a} + \frac{d}{s}e^{-(g+\delta)t}\right] \tag{190}$$

donde d es una constante de integración. Como $z = k^{1-\alpha}$, i.e. $k = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, entonces

$$k(t) = \left\{\frac{s}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}} \left[\frac{1}{g+\delta} + \frac{\left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}}{g+\delta+a} + \frac{d}{s}e^{-(g+\delta)t}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{191}$$

Por tanto, en $t = 0$:

$$k(0) = \left[\frac{s}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{1}{g+\delta} + \frac{\left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)}{g+\delta+a} + \frac{d}{s}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$k(0) = \left(\frac{s}{aL_0/E}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{1}{g+\delta} + \frac{\left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)}{g+\delta+a} + \frac{d}{s}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_0 \tag{192}$$

tal que

$$\left(\frac{aL_0/E}{s}\right)k_0^{1-\alpha} = \frac{1}{g+\delta} + \frac{\left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)}{g+\delta+a} + \frac{d}{s}$$

$$\Rightarrow d = \left(\frac{aL_0}{E}\right)k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)}{g+\delta+a} \tag{193}$$

Sustituyendo la expresión para la constante de integración d en (191), habremos determinado la trayectoria completa del capital:

$$k(t) = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)e^{at}} \left\{\begin{array}{c} \frac{s}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)e^{at}}{g+\delta+a} + \\ \left[\left(\frac{aL_0}{E}\right)k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}{g+\delta+a}\right]e^{-(g+\delta)t} \end{array}\right\}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

o también (usando de forma apropiada el término: e^{-at})

$$k(t) = \left[\frac{1}{e^{-at} + \left(\frac{aL_0}{E} - 1\right)} \left\{\begin{array}{c} \frac{se^{-at}}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}{g+\delta+a} + \\ \left[\left(\frac{aL_0}{E}\right)k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}{g+\delta+a}\right]e^{-(a+g+\delta)t} \end{array}\right\}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{194}$$

Finalmente, y retomando el hecho de que $y = k^{\alpha}$, obtenemos la expresión general para la evolución temporal de la producción:

$$y(t)=\left[\frac{1}{\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)+e^{-at}}\left\{\begin{array}{c}\frac{se^{-at}}{g+\delta}+\frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}{a+g+\delta}+\\ \left[\left(\frac{aL_0}{E}\right)k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{g+\delta}-\frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}{a+g+\delta}\right]e^{-(1-\alpha)(a+g+\delta)t}\end{array}\right\}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \square$$

Pese al resultado marcadamente contrastante de la Proposición anterior con la versión original de Solow, en el largo plazo, los perfiles estacionarios guardan una relativa similitud, como se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 2.2. En el marco del modelo de Solow con progreso técnico aumentador del trabajo, y una dinámica laboral con emigración descrita por la ecuación (180), se tiene que en el estado estacionario de la economía, la producción por unidad eficiente de trabajo está dada por:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y^*=\begin{cases}\left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \text{ si } L_0\neq\frac{E}{a}\\ \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \text{ si } L_0=\frac{E}{a}\end{cases} \tag{195}$$

Demostración. Hay dos formas de abordar la situación de estado estacionario.[25] La primera, consiste en el cálculo directo del límite en la expresión (182), si $L_0\neq E/a$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\left\{\frac{1}{\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}\left[\frac{s\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)}{a+g+\delta}\right]\right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=\left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=y^*$$

resultado que es exactamente igual a lo que ocurre con un modelo malthusiano sencillo como dinámica poblacional. Para el caso en el que $L_0=E/a$:

$$\begin{aligned} y(t)&=\left\{\frac{1}{e^{-at}}\left[\frac{se^{-at}}{g+\delta}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{g+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(a+g+\delta)t}\right]\right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\ &=\left[\frac{s}{g+\delta}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{g+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(g+\delta)t}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\ &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=\left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=y^*\end{aligned}$$

La segunda forma de abordar el estado de estacionario, consiste en la consideración de que, por definición: $\dot{k}=0$. Si utilizamos esta condición en (184), podemos determinar los puntos de equilibrio para cada caso particular. Veamos.

$$0=sk^\alpha-\left(a-\frac{E}{L}+g+\delta\right)k$$

[25]En (195) estamos incluyendo el caso $L_0=E/a$ sólo para cubrir todos los escenarios posibles, pero en realidad dicha situación corresponde a una población constante, por lo que su importancia es secundaria para nuestro objetivo.

$$\Rightarrow k^{1-\alpha} = \frac{s}{g+\delta+\left(a-\frac{E}{L}\right)} \tag{196}$$

¿Qué ocurre con el término poblacional? Recordemos que

$$L(t) = \frac{E}{a}\left[1+\left(\frac{aL_0}{E}-1\right)e^{at}\right] \tag{185}$$

luego

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = \begin{cases} E/a, \text{ si } L_0 = E/a \\ \infty, \text{ si } L_0 > E/a \\ -\infty, \text{ si } L_0 < E/a \end{cases} \tag{197}$$

Con esto, en $t \to \infty$ y cuando $L_0 \neq E/a$, se tiene

$$g+\delta+\left(a-\frac{E}{L}\right) = g+\delta+(a-0) = g+\delta+a \tag{198}$$

Sustituyendo (198) en (196), concluimos que el producto por unidad laboral eficiente está dado por

$$\Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = (k^*)^\alpha = \left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Análogamente, en $t \to \infty$ y cuando $L_0 = E/a$, tenemos

$$g+\delta+\left(a-\frac{E}{L}\right) = g+\delta+\left(a-\frac{aE}{E}\right) = g+\delta \tag{199}$$

$$\Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = (k^*)^\alpha = \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad \square$$

Así, por lo observado en las Proposiciones 2.1 y 2.2, podemos concluir que aún cuando a corto plazo sí existen diferencias entre el modelo de Solow cuando la población tiene o no en consideración a la emigración, tales diferencias prácticamente desaparecen en el largo plazo, pues ambos modelos convergen a estados estacionarios similares. Ilustramos estos resultados en las Figuras 2.3 y 2.4 (en las simulaciones correspondientes hemos utilizado: $\alpha = 0.4$, $s = 0.16$, $a = 0.02$, $\delta = 0.04$, $k_0 = 1$ y $L(0) = L_0 = 20$).

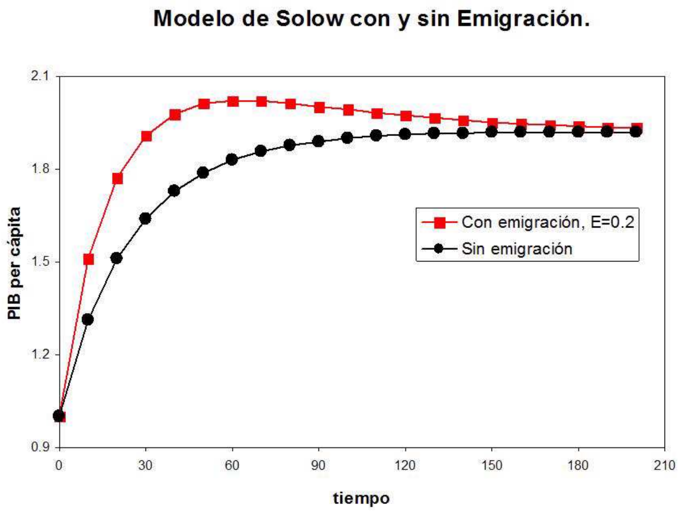

Figura 2.3. Contraste inicial entre el modelo de Solow original y el modelo con emigración.

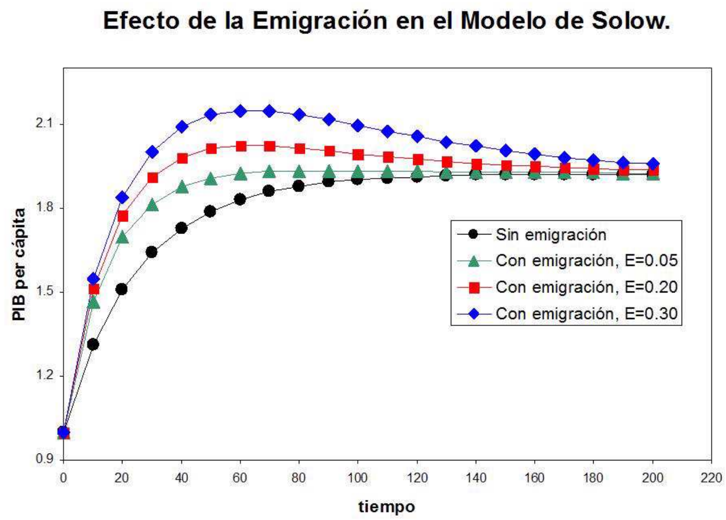

Figura 2.4. La emigración afecta el corto plazo, pero no al estado estacionario de la economía.

Un aspecto adicional a destacar, es el hecho de que en la medida que la emigración se incrementa, en el corto plazo pueden alcanzarse niveles mayores de PIB per cápita respecto a los del estado estacionario; sin embargo, aún en esos casos dicho efecto no es permanente y el PIB per cápita converge a su valor de equilibrio, como se muestra en la Figura 3. Por supuesto, no es una buena idea pensar en la emigración como un mecanismo para alcanzar valores mayores en el PIB per cápita, aunque sea por un plazo corto de tiempo; y la razón es simple: la población puede soportar ciertas tasas de emigración pero no cualquier tasa, en concreto, para que la población sea nula basta con que

$$t=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{E}{E-aL_0}\right)$$

medido en años o períodos de tiempo. Así, el aumento discriminado del parámetro E conduce en determinado momento a la desaparición de la mano de obra; luego, por el supuesto de esencialidad de los factores, no habrá producción si uno (o ambos) de los factores productivos (capital o trabajo) es nulo; por tanto, si se propicia que la emigración sea alta para alcanzar un mayor PIB per cápita, puede presentarse un escenario contraproducente en el que la población desaparece y no habrá producción en la economía.

2.4. CRECIMIENTO LOGÍSTICO.

Si ahora relajamos el supuesto de que el espacio es ilimitado, i.e. si aceptamos el hecho de que la tierra es finita, podremos usar el siguiente modelo logístico de crecimiento de la fuerza laboral:

$$\dot{L}=aL-bL^2\Rightarrow n\left(t\right)=\frac{\dot{L}}{L}=a-bL \tag{200}$$

donde $b>0$, y $a\neq 0$. Así, en este modelo, la tasa de crecimiento tampoco es constante, más bien es proporcional a la cantidad que le falta a la población para llegar a su límite máximo de capacidad del medio. Además, la solución general de (200), es

$$L\left(t\right)=\frac{a}{b+\left(\frac{a}{L_0}-b\right)e^{-at}} \tag{201}$$

con $L\left(0\right)=L_0$ como condición inicial de (200). Veamos ahora el efecto de esta dinámica logística en la versión solowiana del crecimiento económico.

PROPOSICIÓN 2.3. Bajo una función de producción Cobb–Douglas ($y=k^{\alpha}$), en el marco del modelo de Solow con progreso técnico exógeno y aumentador del trabajo, y una dinámica laboral logística descrita por la ecuación (200), la trayectoria temporal del producto por unidad eficiente de trabajo está descrita por:

$$y\left(t\right)=\left[\frac{1}{\left(\frac{a}{bL_0}-1\right)e^{-at}+1}\left\{\begin{array}{c}\frac{s}{g+\delta}+\frac{s\left(\frac{a}{bL_0}-1\right)e^{-at}}{a+g+\delta}+\\ \left[\left(\frac{a}{bL_0}\right)k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{g+\delta}-\frac{s\left(\frac{a}{bL_0}-1\right)}{a+g+\delta}\right]e^{-(g+\delta)t}\end{array}\right\}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{202}$$

Demostración. Si incorporamos el modelo demográfico (200) en la ecuación fundamental de Solow:

$$\dot{k}=sf\left(k\right)-\left(\frac{\dot{L}}{L}+\frac{\dot{A}}{L}+\delta\right)k$$

$$\dot{k}=sf\left(k\right)-\left(a-bL+g+\delta\right)k \tag{203}$$

y como $y=k^{\alpha}$ por Cobb–Douglas:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (a - bL + g + \delta)\, k \tag{204}$$

A continuación, vamos a reexpresar el término laboral original

$$L(t) = \frac{a}{b + \left(\frac{a}{L_0} - b\right) e^{-at}} \tag{201}$$

como sigue:

$$L(t) = \frac{a}{b\left[1 + \left(\frac{a}{bL_0} - 1\right) e^{-at}\right]} \tag{205}$$

Sustituyendo (205) en (203):

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - \left\{ g + \delta + a - \frac{ba}{b\left[1 + \left(\frac{a}{bL_0} - 1\right) e^{-at}\right]} \right\} k$$

$$\dot{k} + \left\{ g + \delta + a \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{bL_0} - 1\right) e^{-at}}\right] \right\} k = sk^{\alpha} \tag{206}$$

Tal como en la demostración de la Proposición 2.1, la ecuación fundamental resulta ser una ecuación diferencial de Bernoulli, con forma general:

$$\dot{k} + R(t)\, k = V(t)\, k^{m} \tag{188}$$

donde los términos m y $V(t)$ son idénticos, pero no así $R(t)$, que sí muestra una ligera diferencia:

$$R(t) = g + \delta + a \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{bL_0} - 1\right) e^{-at}}\right] \tag{207}$$

Sin embargo, nótese que incluso la forma funcional de este nuevo término $R(t)$, es la misma que la del término $R(t)$ de la sección precedente y que describe una población exponencial con migración, de manera que el procedimiento analítico a utilizar aquí es idéntico paso a paso al empleado en la demostración de la Proposición 2.1, por lo que ya no lo describiremos de nuevo.
La solución analítica para el capital, resulta ser:

$$k(t) = \left[\frac{1}{\left(\frac{a}{bL_0} - 1\right) e^{-at} + 1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{s}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{a}{bL_0} - 1\right) e^{-at}}{g+\delta+a} + \\ \left[\left(\frac{a}{bL_0}\right) k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{g+\delta} + \frac{s\left(\frac{a}{bL_0} - 1\right)}{g+\delta+a}\right] e^{-(g+\delta)t} \end{array} \right\} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{208}$$

Por último, por el supuesto de función de producción Cobb–Douglas, $y = k^{\alpha}$, obtenemos la trayectoria temporal completa de la producción:

$$y(t)=\left[\frac{1}{\left(\frac{a}{bL_0}-1\right)e^{-at}+1}\left\{\begin{array}{c}\frac{s}{g+\delta}+\frac{s\left(\frac{a}{bL_0}-1\right)e^{-at}}{g+\delta+a}+\\ \left[\left(\frac{a}{bL_0}\right)k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{g+\delta}+\frac{s\left(\frac{a}{bL_0}-1\right)}{g+\delta+a}\right]e^{-(g+\delta)t}\end{array}\right\}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad \square$$

PROPOSICIÓN 2.4. En el marco del modelo de Solow con progreso técnico aumentador del trabajo y una dinámica laboral logística dada por la ecuación (200), en el estado estacionario de la economía la producción por unidad laboral eficiente viene dada como sigue:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y^*=\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},\ \text{si } L_0\neq\frac{a}{b}\ \ \&\ a<0\\ \\ \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},\ \text{si } L_0=\frac{a}{b}\ \text{ ó si }\ L_0\neq\frac{a}{b}\ \ \&\ a>0\end{array}\right. \tag{209}$$

Demostración. Recordemos que, por la Definición 1.1, en el estado de equilibrio: $\dot{k}=0$. Entonces, la ecuación fundamental queda:

$$0=sk^{\alpha}-(a-bL+g+\delta)k$$

$$\Rightarrow k^{1-\alpha}=\frac{s}{g+\delta+(a-bL)} \tag{210}$$

Pero también podemos determinar los términos de población en el largo plazo. Recordemos que

$$L(t)=\frac{a}{b+\left(\frac{a}{L_0}-b\right)e^{-at}} \tag{201}$$

tal que $(L_0>0)$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Si } L_0\neq\frac{a}{b}:\qquad \lim_{t\to\infty}L(t)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{si } a<0\\ \\ \frac{a}{b},\ \text{si } a>0\end{array}\right.\\ \\ \qquad\quad \text{Si } L_0=\frac{a}{b}:\qquad \lim_{t\to\infty}L(t)=\frac{a}{b}\end{array}\right. \tag{211}$$

Así, en $t\to\infty$ para el primer caso, tenemos

$$g+\delta+(a-bL)=g+\delta+(a-0)=g+\delta+a \tag{212}$$

Sustituyendo (212) en (210), podemos concluir que el producto por unidad eficiente de trabajo está dado por

$$\Rightarrow k^*=\left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\Rightarrow y^*=(k^*)^{\alpha}=\left(\frac{s}{a+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

De la misma forma para los dos casos restantes, en $t\to\infty$:

$$g+\delta+(a-bL)=g+\delta+\left(a-b\frac{a}{b}\right)=g+\delta \tag{213}$$

$$\Rightarrow k^{*}=\left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^{*}=(k^{*})^{\alpha}=\left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad \square$$

De nueva cuenta, podemos observar que hay diferencias importantes en cómo se aproxima el capital a su valor de estado estacionario (estas diferencias están dadas por cada versión de encontrada), pero, en el largo plazo, se alcanzan estados estacionarios similares o a veces idénticos, según la combinación de parámetros y condiciones iniciales del modelo logístico.

2.5. CRECIMIENTO LOGÍSTICO CON EMIGRACIÓN.

Una aproximación que no se ha ensayado en la literatura del crecimiento, es cuando la dinámica laboral posee comportamiento logístico pero simultáneamente se considera la posibilidad de migración.

Una población que crece *á la* Verhulst con emigración, experimenta la siguiente dinámica

$$\dot{L}=rL\left(1-\frac{L}{C}\right)-E \tag{214}$$

con $L(0)=L_0$ y donde E es un coeficiente de emigración, tal que $E, r, C>0$ y $C>4E/r$. Por lo tanto, la tasa de crecimiento laboral es

$$n(t)=\frac{\dot{L}}{L}=r\left(1-\frac{L}{C}\right)-\frac{E}{L} \tag{215}$$

La solución de (215) es

$$L(t)=\frac{1}{\left(\frac{1}{L_0-P}+\frac{r}{\beta C}\right)e^{\beta t}-\frac{r}{\beta C}}+P \tag{216}$$

donde los nuevos términos β y P, son

$$\beta=\sqrt{r^{2}-\frac{4Er}{C}} \tag{217}$$

$$P=\frac{1}{2}\left(C+\sqrt{C^{2}-\frac{4Er}{C}}\right) \tag{218}$$

PROPOSICIÓN 2.5. En el marco del modelo de Solow con progreso técnico aumentador del trabajo, y una dinámica laboral logística con emigración dada por la ecuación (214), entonces la emigración sí tiene efectos en el estado estacionario de la economía. Más aún, la producción por unidad laboral eficiente viene dada como sigue:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y^{*}=\begin{cases}\left[\frac{sPC}{PC(g+\delta)+r(C-P)-EC}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, & \text{si } L_0\neq C-P\\[2ex] \left[\frac{sL_0C}{L_0C(g+\delta)+r(C-L_0)-EC}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, & \text{si } L_0=C-P\end{cases} \tag{219}$$

donde $P = P(E)$.
Demostración. En el estado de equilibrio de la economía: $\dot{k} = 0$, luego

$$0 = sk^{\alpha} - \left\{ \left[r \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{E}{L} \right] + g + \delta \right\} k$$

$$\Rightarrow k^{1-\alpha} = \frac{s}{\left[g + \delta + r \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{E}{L} \right]} \tag{220}$$

Veamos que, por (216),

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = \begin{cases} P, \text{ si } L_0 \neq C - P \\ \\ L_0, \text{ si } L_0 = C - P \end{cases} \tag{221}$$

Para el caso más realista en el que $L_0 \neq C - P$, se tiene

$$g + \delta + \left[r \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{E}{L} \right] = g + \delta + \left[r \left(1 - \frac{P}{C} \right) - \frac{E}{P} \right] \tag{222}$$

Así, sustituyendo (222) en (215), podemos concluir que el producto por unidad eficiente de trabajo está dado por

$$\Rightarrow k^* = \left[\frac{s}{g + \delta + r \left(1 - \frac{P}{C} \right) - \frac{E}{P}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = \left[\frac{s}{g + \delta + r \left(1 - \frac{P}{C} \right) - \frac{E}{P}} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

o también

$$k^* = \left[\frac{sPC}{PC(g+\delta) + r(C-P) - EC} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = \left[\frac{sPC}{PC(g+\delta) + r(C-P) - EC} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

habiendo hecho uso de

$$g + \delta + \left[r \left(1 - \frac{P}{C} \right) - \frac{E}{P} \right] = g + \delta + \left[\frac{r}{C}(C-P) - \frac{E}{P} \right] = g + \delta + \left[\frac{r(C-P) - EC}{PC} \right]$$

$$g + \delta + \left[r \left(1 - \frac{P}{C} \right) - \frac{E}{P} \right] = \frac{PC(g+\delta) + r(C-P) - EC}{PC} \tag{223}$$

Por el contrario, si $L_0 = C - P$, entonces en $t \to \infty$:

$$g + \delta + \left[r \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{E}{L} \right] = g + \delta + \left[r \left(1 - \frac{L_0}{C} \right) - \frac{E}{L_0} \right] \tag{224}$$

Procediendo como en el caso anterior, concluimos que el producto por unidad laboral eficiente está dado por

$$k^* = \left[\frac{s}{g + \delta + r \left(1 - \frac{L_0}{C} \right) - \frac{E}{L_0}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = \left[\frac{s}{g + \delta + r \left(1 - \frac{L_0}{C} \right) - \frac{E}{L_0}} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

o lo que es lo mismo

$$k^* = \left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = \left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

pues

$$g+\delta+\left[r\left(1-\frac{L_0}{C}\right)-\frac{E}{L_0}\right] = \frac{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}{L_0C} \tag{225}$$

Como puede verse, en ambos casos la emigración está presente en el estado estacionario, en claro contraste con lo encontrado en las Proposiciones 2.2 y 2.4. □

En este punto, la pregunta obvia sería si es posible determinar el efecto de la emigración en el estado estacionario, parte de la respuesta la damos en el siguiente:

COROLARIO 2.1. Bajo las condiciones de la Proposición 2.5 y para el caso en el que $L_0 = C-P$, la emigración tiene un efecto positivo en el valor de equilibrio de la producción laboral eficiente de la economía, si la población inicial y la cantidad de trabajadores emigrando es tal que se cumple la relación: $L_0\,(g+\delta) > E$.

Demostración. Por la Proposición 2.5, el valor de equilibrio de la producción cuando $L_0 = C-P$, está dado por

$$\lim_{t\to\infty} y\,(t) = y^* = \left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{226}$$

Para determinar la naturaleza del efecto de la emigración E, en y^*, podemos calcular

$$\frac{\partial y^*}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial E} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\frac{sL_0C^2}{\left[L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC\right]^2}\right\}\left[\frac{sL_0C}{L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC}\right]^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \tag{227}$$

Obsérvese que

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} > 0$$

pues $0 < \alpha < 1$, y además

$$\frac{sL_0C^2}{\left[L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC\right]^2} > 0 \tag{228}$$

Por otro lado, si $L_0\,(g+\delta) > E$, entonces

$$L_0C\,(g+\delta) + r\,(C-L_0) - EC > 0 \tag{229}$$

Luego,

$$\frac{\partial y^*}{\partial E} > 0 \tag{230}$$

Nótese que la validez de (229) se debe a que si retomamos $L_0 = C - P$ (i.e. $C - L_0 = P$), se tiene

$$\begin{aligned} L_0 C (g + \delta) + r (C - L_0) - EC &= L_0 C (g + \delta) + rP - EC \\ &= [L_0 (g + \delta) - E] C + rP \end{aligned}$$

y como r, P, $C > 0$, podemos ver que el signo de $L_0 C (g + \delta) + r (C - L_0) - EC$ sólo depende de la relación de magnitudes entre los términos $L_0 (g + \delta)$ y E. $\square$

En un trabajo adicional, lo interesante sería verificar si el mismo efecto positivo del Corolario 2.1 también se verifica para el caso en el que $L_0 \neq C - P$.

Cuadro 2.1. Antecedentes en la modelación de la dinámica laboral.

Año	Autor (es)	Versión de crecimiento utilizada	Función de Producción	Dinámica Laboral	Tecnología como factor productivo	Forma funcional de la tecnología	Descripción
1956	Haavelmo	Pre-Solow	Varios tipos.	Dependiente del grado de capitalización, del nivel educativo y del producto per cápita.	Endógena y exógena.	Dependiente del capital físico, de la mano de obra y como función lineal del tiempo.	Trayectoria temporal completa y determinación de estado estacionario no trivial en algunos modelos.
1977	Robertson y Wellisz	Solow	Neoclásica general	Exponencial con migración	No modelada.	–	Análisis principalmente gráfico del estado estacionario no trivial.
2003	Scarpello y Ritelli	Solow	Cobb–Douglas	Logística	Parámetro	A fija	Trayectoria temporal completa usando función hipergeométrica y determinación de estado estacionario no trivial.
2004	Barro y Sala–i–Martín	Solow y Ramsey	Neoclásica general	Exponencial con migración	Parámetro	A fija	La migración implica un cierto grado de movilidad de capital humano.
2005	Brida y Limas	Solow	Cobb–Douglas	Ley de von Bertalanffy	No considerada	–	Trayectoria temporal completa, demostración de existencia de estado de equilibrio no trivial y análisis de estabilidad.
2005	Accinelli y Brida	Solow	Cobb–Douglas	Ley de Richards	No considerada	–	Trayectoria temporal completa, demostración de existencia de estado de equilibrio no trivial y análisis de estabilidad.
2006	Ritelli, Scarpello y Brida	Solow	Cobb–Douglas	Logística	Parámetro.	A fija	Demostración de existencia de estado de equilibrio no trivial y análisis de estabilidad.

Para finalizar la sección, en el Cuadro 2.1 hacemos la comparación entre los resultados aquí desarrollados y los avances reportados en la literatura.

Cuadro 2.1. Antecedentes en la modelación de la dinámica laboral (sigue).

Año	Autor (es)	Versión de crecimiento utilizada	Función de Producción	Dinámica Laboral	Tecnología como factor productivo	Forma funcional de la tecnología	Descripción
2006	Accinelli y Brida.	Ramsey	Neoclásica general	Logística	No considerada	–	Demostración de existencia de estado de equilibrio no trivial y análisis de estabilidad.
2007	Pieretti y Zou	Solow	Cobb–Douglas	Exponencial con migración, pero con dos tipos de mano de obra	Exógena.	$\dot{A} = gA$	Trayectoria temporal completa y demostración de existencia de estado estacionario no trivial.
2007	Accinelli y Brida.	Ramsey	Neoclásica general	Ley de von Bertalanffy	No considerada	–	Demostración de existencia de estado de equilibrio no trivial y análisis de estabilidad.
2007	Brida y Accinelli	Ramsey	Neoclásica general	Logística	No considerada	–	Demostración de existencia y unicidad de estado estacionario no trivial, y análisis de estabilidad.
2008	Brida	Solow	Neoclásica general	Logística	No considerada	–	Demostración de existencia de estado estacionario no trivial y análisis de estabilidad.
2008	Esta tesis.	Solow	Cobb–Douglas	Exponencial con migración	Exógena.	$\dot{A} = gA$	Trayectoria temporal completa y determinación de estado estacionario no trivial.
2008	Esta tesis.	Solow	Cobb–Douglas	Logística	Exógena.	$\dot{A} = gA$	Trayectoria temporal completa y determinación de estado estacionario no trivial.
2008	Esta tesis.	Solow	Cobb–Douglas	Logística con migración	Exógena.	$\dot{A} = gA$	Determinación de estado estacionario no trivial.

Capítulo 3. Tecnología.

Es bien sabido que la tecnología o el avance tecnológico juega un papel marcadamente positivo en el comportamiento de la economía de las naciones, de manera que se han realizado varios esfuerzos por modelar matemáticamente su efecto en el crecimiento productivo y en el bienestar de la sociedad. Por ejemplo, en el capítulo primero de esta tesis, hemos visto cómo la tecnología es el motor del crecimiento en el modelo de Solow. En este tercer capítulo, realizamos una extensión al modelo de Nelson–Phelps de innovación tecnológica para incluir consideraciones de política económica que permitan influir en el progreso técnico local, todo esto en el marco de la teoría neoclásica del crecimiento económico y con base en la evidencia empírica. Los países considerados difieren sólo en sus propias capacidades de innovación tecnológica y en su capacidad de asimilación técnica, así como de parámetros estructurales como son la tasa de ahorro y la de natalidad.

3.1. INTRODUCCIÓN.

¿Cuál es la situación actual de la ciencia y la tecnología en nuestro país? A grandes rasgos, podemos mencionar que la ciencia y tecnología en México se ha caracterizado por la presencia de exponentes destacados pero solitarios y no tanto por escuelas de pensamiento “completas”, como ha sido el caso en las artes; por ejemplo, la corriente muralista en pintura, integrada por Diego Rivera, David Alfaro Siqueiros, José Clemente Orozco, etc. y sus seguidores en México y todo el mundo a principios del Siglo XX. Por el contrario, los científicos y tecnólogos mexicanos aunque han contado con varios casos de desempeño sobresaliente a nivel internacional, generalmente han representado casos aislados y heroicos de voluntad personal más que ser el resultado de políticas públicas decididas a incentivar el desarrollo científico nacional. Las estadísticas de apoyo gubernamental son muy claras al respecto, como puede verse en el siguiente cuadro.

AÑO: 2002	Dólares disponibles por trabajador en I+D	Porcentaje del PIB asignado a I+D
América Latina	35.6	0.5
Argentina	54.5	0.4
Brasil	58.0	0.6
Chile	44.2	0.7
Costa Rica	15.6	0.3
El Salvador	15.8	0.3
México	***20.7***	***0.4***
Panamá	18.2	0.4
Uruguay	31.1	0.1
Corea del Sur	434.0	2.8
Malasia	22.8	0.2
Singapur	628.2	1.1
Australia	521.6	1.7
Canadá	507.4	1.6
Finlandia	1,300.9	2.5
Nueva Zelanda	291.2	1.1
Noruega	956.8	1.8
Suecia	1,709.7	3.4

Cuadro 3.1. Inversión total y dólares disponibles por trabajador en I+D. Fuente: de Ferranti et al (2003), p. 42.

En este primer cuadro, se muestra que en México se cuenta con un apoyo gubernamental a actividades de I+D, porcentualmente equivalente al resto de los principales países latinoamericanos; no obstante, la cantidad de dólares por trabajador dedicado a actividades científicas, es marcadamente menor a la de Brasil, Argentina y Chile, quienes tienen el liderazgo en este sector; más aún, México se ubica por debajo de la media latinoamericana en cuanto a los recursos disponibles en dólares por científico y/o tecnólogo. El contraste es todavía mayor con respecto a los tigres asiáticos y los países europeos.

AÑO: 2005	Gasto en I+D como porcentaje del PIB
Suecia	4.27
Finlandia	3.41
Japón	3.07
Estados Unidos	2.74
Alemania	2.51
Dinamarca	2.40
Francia	2.23
Reino Unido	1.86
Italia	1.11
España	0.95
Portugal	0.85
Grecia	0.65
México	***0.40***
Promedio OCDE	2.07

Cuadro 3.2. Porcentaje del PIB dirigido a I+D; contraste México-OCDE. Fuente: Foro Consultivo Científico y Tecnológico (2006), p. 6.

En el cuadro 3.2 podemos ver un comparativo del porcentaje del PIB que algunos países de la OCDE destinan a investigación y desarrollo; en promedio, los miembros de la OCDE ocupan el dos por ciento de su ingreso nacional a ese sector, pero en México sólo se asigna un 0.4 % a tal rubro, porcentaje por debajo de naciones como Grecia y Portugal.

	Población, en millones (1992)	Número de Científicos	Científicos por millón de habitantes	Publicaciones como porcentaje del total mundial (1994)
Brasil	156.3	11,768	75.3	0.64
Argentina	33.1	4,543	137.3	0.35
México	***89.5***	***3,786***	***42.3***	***0.33***
Chile	13.6	2,114	155.4	0.17
Cuba	10.8	2,957	273.8	0.02
América Latina	427.9	28,707	67.1	1.75
Estados Unidos	255.0	949,200	3,722.4	30.82
Japón	124.4	80,442	646.6	8.24
Alemania	77.6	15,480	199.5	7.18
Israel	4.9	5,900	1,191.9	1.07

Cuadro 3.3. Población, número de científicos y publicaciones. Fuente: Ciencia y Desarrollo (Memoria 1998), p. 223.

Observemos ahora el cuadro 3.3; en él se muestra el número de científicos en datos brutos y por millón de habitantes en una muestra de países latinoamericanos y en otros más con liderazgo en I+D. Las cifras en bruto en relación al número de científicos no son desfavorables respecto a latinoamérica pero sí lo son en cuanto al número de ellos por millón de habitantes. Para un país de las dimensiones demográficas de México, podrían esperarse mayores recursos humanos laborando en ciencia y tecnología. El contraste es crítico respecto a los países líderes, aún en comparación con una nación territorial y poblacionalmente pequeña como Israel, donde la masa porcentual de científicos y tecnólogos y su producción traducida en publicaciones, es superior.

AÑO: 2003	Personal Total en actividades de I+D por cada mil de fuerza laboral
Finlandia	15.9
Canadá	10.6
Estados Unidos	9.1
Alemania	6.8
Italia	6.8
Corea del Sur	6.6
España	4.7

Cuadro 3.4. Número de científicos y tecnólogos por cada mil habitantes, para países seleccionados. Fuente: Foro Consultivo Científico y Tecnológico (2006), p. 258.

Una cifra quizá más apropiada para medir la presencia de los recursos humanos dedicados a la I+D, es la mostrada en los cuadros 3.4 y 3.5, esto es, el número de científicos y tecnólogos por cada millar de habitantes. Esta cifra puede tomarse como un indicador parcial de las políticas nacionales de apoyo a I+D, pues invariablemente las personas agrupadas en este rubro deben contar con un mínimo de condiciones para desempeñar actividades de desarrollo científico y técnico. Los datos del cuadro 3.5 presentan el comportamiento para el caso mexicano, en rezago considerable respecto a los países enlistados en el cuadro 3.4.

México	Personal Total en actividades de I+D por cada mil de fuerza laboral
1993	0.5
1994	0.6
1995	0.7

Cuadro 3.5. Número de investigadores por cada millar de habitantes en México. Fuente: Ciencia y Desarrollo (Memoria 1998), p. 58; y Foro Consultivo Científico y Tecnológico (2006), p. 20.

Los datos son convincentes: en resumen, podemos decir que la situación en I+D en México es crítica y requiere de un decidido esfuerzo gubernamental y privado para reanimar este sector de manera que pueda al menos emparejarse respecto a los estándares mostrados en otras regiones.

En la parte central de este tercer capítulo de tesis, presentamos una propuesta para tratar de modelar el comportamiento de I+D en una economía nacional, utilizando para ello el enfoque de Nelson–Phelps que discutiremos a continuación.

3.2. EL MODELO DE NELSON–PHELPS.

En el primer capítulo de esta tesis hemos visto la importancia de la tecnología como factor determinante en el crecimiento económico, y en la sección precedente revisamos brevemente algunos indicadores del estado de la ciencia y la tecnología actual en México. En esta sección, veremos cómo puede modelarse el proceso de cambio tecnológico mediante el concepto de difusión de tecnología, con la intención de incorporar más adelante al factor progreso técnico en el marco teórico del crecimiento económico.

Un punto de partida apropiado es el trabajo desarrollado por Richard Nelson y Edmund Phelps (1966), quienes originalmente consideraron un modelo aplicable a la difusión tecnológica al interior de un país, contrastando la "mejor utilización posible" de la tecnología, i.e. A_1, con la tecnología tal como realmente se utiliza, A_2. La hipótesis clave en su trabajo fue la de asumir el efecto Veblen–Gershenkron, esto es, la idea de que entre más grande sea la disparidad en los niveles de desarrollo entre dos naciones, mayor será la rapidez con la cual un país rezagado puede darle alcance al líder. A esto tambien se le conoce como la hipótesis de la ventaja del retraso.

Más adelante, Hansson y Henrekson (1994) aplicaron este modelo a la difusión tecnológica internacional, donde ahora A_1 y A_2 representa el nivel de tecnología de un país líder y de un país rezagado; esta es la interpretación que usaremos aquí.

Supuesto 1. Existe un país líder en innovación tecnológica, con una tasa constante de generación de tecnología, g; de manera que el nivel de tecnología en este país a cualquier tiempo t, está dado por:

$$A_1(t) = A_1^0 e^{gt} \tag{231}$$

donde A_1^0 es el nivel tecnológico inicial en la región líder.

Supuesto 2. (Efecto Veblen–Gershenkron) Existe un país tecnológicamente rezagado o país seguidor, cuyo grado de avance tecnológico $A_2(t)$, varía con el tiempo en forma proporcional a su rezago respecto al país líder: $A_1(t) - A_2(t)$. Esto es:

$$\dot{A}_2(t) = \Phi[A_1(t) - A_2(t)] \tag{232}$$

donde Φ es un parámetro identificado como "capacidad de absorción" y que incopora aquellos factores que permiten la rápida o lenta adopción de la tecnología del país líder, de manera que Φ es un indicador de la facilidad de asimilación técnica que posee el país seguidor ($\Phi > 0$). Por ejemplo, la magnitud de Φ depende de factores como la educación de la fuerza laboral, la calidad de la administración, etc.

Es claro que lo inmediatamente abordable a partir de estos supuestos, es determinar las tasas de cambio de la tecnología en cada país, hacemos esto en la siguiente:

PROPOSICIÓN 3.1. Por los supuestos 1 y 2, las tasas de cambio tecnológico (o de progreso técnico, como también se les denomina) para los países están dadas por:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = g \tag{233}$$

$$\frac{\dot{A}_2}{A_2} = \Phi\left(\frac{A_1 - A_2}{A_2}\right) \tag{234}$$

Demostración. Es directa: el resultado dado por (233) es inmediato a partir del supuesto 1. Para obtener (234), basta con dividir por $A_2(t)$, en ambos extremos de la ecuación (232). □
Es posible también dar una expresión analítica para la tecnología del país rezagado, como veremos a continuación.
PROPOSICIÓN 3.2. El avance tecnológico para cada tiempo t en el país seguidor, viene dado por:

$$A_2(t) = \left(A_2^0 - \frac{\Phi}{\Phi+g}A_1^0\right)e^{-\Phi t} + \frac{\Phi}{\Phi+g}A_1^0 e^{gt} \tag{235}$$

donde A_2^0 es el nivel tecnológico inicial en la región rezagada.
Demostración. Sustituyendo (233) en (232), tenemos que

$$\dot{A}_2(t) = \Phi\left[A_1^0 e^{gt} - A_2(t)\right] \tag{236}$$

o lo que es lo mismo

$$\dot{A}_2(t) + \Phi A_2(t) = \Phi A_1^0 e^{gt} \tag{237}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y lineal, con forma general

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t) \tag{238}$$

y cuya solución por factor de integración es bien conocida:

$$x(t) = \frac{c + \int e^{-\int p(t)dt} q(t)\,dt}{e^{-\int p(t)dt}} \tag{239}$$

donde c es una constante. Sustituyendo $x(t) = A_2(t)$, $p(t) = \Phi$ y $q(t) = \Phi A_1^0 e^{gt}$ en (239), se obtiene el resultado indicado en (235). □
Definición 3.1. Sea $a(t)$ la proporción tecnológica entre países:

$$a(t) = \frac{A_2(t)}{A_1(t)} \tag{240}$$

PROPOSICIÓN 3.3. En el largo plazo, ambas tecnologías convergen a un "punto de equilibrio" dado por:

$$a^* = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^* = \frac{\Phi}{\Phi+g} \tag{241}$$

Demostración. En el largo plazo, (i.e. $t \to \infty$), se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} A_2(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\left(A_2^0 - \frac{\Phi}{\Phi+g}A_1^0\right)e^{-\Phi t} + \frac{\Phi}{\Phi+g}A_1^0 e^{gt}\right] = \frac{\Phi}{\Phi+g}\lim_{t\to\infty}\left(A_1^0 e^{gt}\right) \tag{242}$$

luego

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{A_2(t)}{A_1(t)}\right] = \frac{\lim_{t\to\infty} A_2(t)}{\lim_{t\to\infty} A_1(t)} = \frac{\frac{\Phi}{\Phi+g}\lim_{t\to\infty}\left(A_1^0 e^{gt}\right)}{\lim_{t\to\infty}\left(A_1^0 e^{gt}\right)} = \frac{\Phi}{\Phi+g} = a^*$$

y este es el resultado buscado. □

PROPOSICIÓN 3.4. En el largo plazo, ambas tecnologías tienden a una "brecha de equilibrio" dada por:

$$\left(\frac{A_1 - A_2}{A_2}\right)^* = \frac{g}{\Phi} \tag{243}$$

y la tecnología del país rezagado crece a la misma tasa que la del país líder.

Demostración. Por la definición 3.1, para cualquier tiempo t, el término $(A_1 - A_2)/A_2$ puede expresarse

$$\frac{A_1 - A_2}{A_2} = \frac{A_1}{A_2} - 1 = \frac{1}{a} - 1 \tag{244}$$

En el largo plazo, ($t \to \infty$), se tiene que

$$\left(\frac{A_1 - A_2}{A_2}\right)^* = \frac{1}{a^*} - 1 = \frac{\Phi + g}{\Phi} - 1 = \frac{\Phi + g - \Phi}{\Phi} = \frac{g}{\Phi}$$

Luego, la tasa de progreso técnico del país seguidor resulta:

$$\left(\frac{\dot{A}_2}{A_2}\right)^* = \Phi\left(\frac{A_1 - A_2}{A_2}\right)^* = \Phi\frac{g}{\Phi} = g \tag{245}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{\dot{A}_2}{A_2}\right)^* = g = \left(\frac{\dot{A}_1}{A_1}\right)^* = \frac{\dot{A}_1}{A_1} \quad \square$$

La intuición detrás de las proposiciones 3.3 y 3.4 está en que existe un estado de equilibrio en el cual la tasa de crecimiento de A_2 iguala a la de A_1, y nos referiremos a este equilibrio como la "brecha tecnológica de largo plazo" o simplemente la "brecha tecnológica de equilibrio". Las siguientes figuras ilustran este resultado.

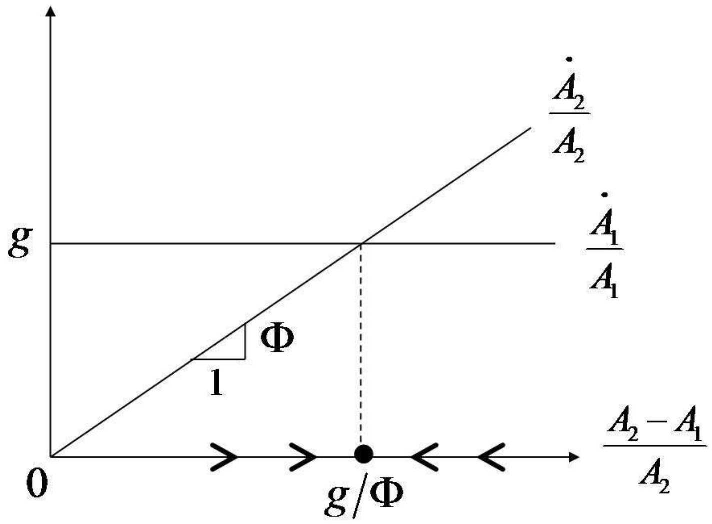

Figura 3.1.

La ecuación (232) y las dos proposiciones anteriores predicen que cuando los países bajo análisis inicien con una proporción tecnológica $a = A_2/A_1$ menor al nivel de equilibrio, entonces el país rezagado experimentará un rápido (pero descendente) crecimiento respecto a g, la tasa de progreso técnico del país líder, hasta que se alcance el nivel a^*. Por el contrario, si los países inician con una proporción $a > a^*$, entonces el país seguidor experimentará tasas de crecimiento menores que g, hasta alcanzar el punto de equilibrio a^*.

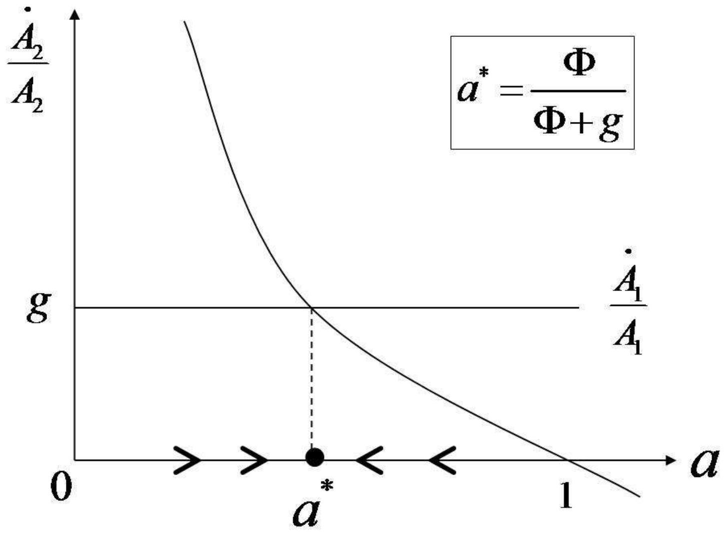

Figura 3.2.

Un aspecto muy importante es que en el estado de equilibrio el nivel tecnológico del país seguidor es inferior al nivel del país líder. Es decir, permanentemente habrá un rezago por

parte del país seguidor; sin embargo, aunque este retraso sea permanente, sí puede disminuirse. La única forma para que el país seguidor disminuya su rezago respecto al líder tecnológico, es aumentando el parámetro Φ, esto es mejorando las capacidades técnicas, culturales, institucionales, etc., que impiden una mejor asimilación tecnológica del país rezagado. De forma general, la brecha de equilibrio $\left[\left(A_1 - A_2\right)/A_2\right]^* = g/\Phi$ ó el punto de equilibrio $a^* = \Phi/\left(\Phi + g\right)$ cambiarán sólo si hay variaciones en Φ ó en g.
Cabe destacar que el aspecto fundamental del modelo radica en la expresión matemática con la que se ha representado el supuesto 2, cuya forma funcional es básicamente arbitraria. Otras formas funcionales que satisfacen ese mismo supuesto pueden encontrarse en el capítulo 4 de la obra de Mark Rogers (2003) y las referencias ahí citadas.

3.3. UN MODELO NELSON–PHELPS EXTENDIDO.

En este apartado, presentaremos una extensión del modelo anteriormente descrito, con la intención de hacer relativamente más explícita la forma en que se presenta el cambio técnico entre economías líderes en tecnología y economías rezagadas; para ello, haremos uso del marco de Solow–Swan descrito en el primer capítulo y realizaremos supuestos más específicos en torno a la manera en que el número de personas dedicadas a la I+D y el financiamiento gubernamental de tales actividades, son determinantes para la dinámica del progreso técnico nacional.
Supuesto 1. Consideraremos dos países: el país 1 ó región norte y el país 2 o región sur. La producción y la acumulación de capital en cada país, están dadas por:

$$Y_i = K_i^{\alpha}\left[A_i\left(1 - l_i\right)L_i\right]^{1-\alpha} \tag{246}$$

$$\dot{K}_i = s_i Y_i - \delta K_i \tag{247}$$

donde s_i es la tasa de ahorro del i–ésimo país $(0 < s_i < 1)$, δ es la tasa de depreciación del capital $(0 < \delta < 1)$, α es la participación del capital $(0 < \alpha < 1)$, K_i y Y_i corresponden al capital y la función de producción neoclásica del i–ésimo país, A_i indica la tecnología de cada región $(A_1 > A_2)$, y por último L_i representa la mano de obra en el país i.
Supuesto 2. En el país 1, el avance tecnológico depende de: a) la asignación de personas en I+D:[26] l_1 $(0 < l_1 < 1)$, y b) del apoyo gubernamental vía financiamiento: χ_1, donde $0 < \chi_1 < 1$, como sigue:

$$\dot{A}_1 = \chi_1 l_1 A_1 \tag{248}$$

Supuesto 3. La tecnología en el Sur depende de los apoyos locales a la I+D: χ_2 $(0 < \chi_2 < 1)$, pero también de su retraso o rezago respecto al avance técnico en el Norte (que es el líder tecnológico), bajo la siguiente forma funcional:

$$\dot{A}_2 = \chi_2 l_2 A_2 + \mu\left(A_1 - A_2\right) \tag{249}$$

En esta última ecuación, μ es una constante de proporcionalidad tal que $\mu > 0$, y tiene un papel análogo al de Φ en la versión original de Nelson–Phelps.

[26] Dicha asignación está dada como porcentaje el total L_i.

Supuesto 4. La mano de obra o fuerza laboral de cada región, se incrementa siguiendo una ley malthusiana de crecimiento:

$$L_i = L_i^0 e^{n_i t} \tag{250}$$

donde $i = 1, 2$, representan a la región líder y a la rezagada, respectivamente.

3.4. DINÁMICA Y RESULTADOS.

Bajo el esquema anterior, veremos en las siguientes proposiciones que se conservan las características del modelo Solow–Swan de crecimiento económico pero en un marco relativamente más amplio en contenido conceptual respecto al progreso técnico.

*PROPOSICIÓN 3.5.*Por los supuestos 2 y 3, a) la tasa de progreso técnico para la región líder en todo tiempo t, está dada por:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = \chi_1 l_1 \tag{251}$$

b) en el largo plazo, ambas tecnologías convergen a la siguiente "proporción de equilibrio":

$$a^* = \frac{\mu}{\mu + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2} \tag{252}$$

c) para la región rezagada, la tasa de avance tecnológico en el largo plazo coincide con la del país líder:

$$\left(\frac{\dot{A}_2}{A_2}\right)^* = \chi_1 l_1 = \left(\frac{\dot{A}_1}{A_1}\right)^* = \frac{\dot{A}_1}{A_1} \tag{253}$$

Demostración. a) La expresión (251) se sigue del supuesto 2; b) para probar (252), consideremos que a partir de la definición 3.1 y utilizando propiedades de los logaritmos, se tiene que

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} - \frac{\dot{A}_1}{A_1} \tag{254}$$

Sustituyendo (248) y (249) en (254), y desarrollando el álgebra correspondiente se obtiene la ecuación diferencial

$$\dot{a} + (\mu + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2)\, a = \mu \tag{255}$$

cuya solución es

$$a\,(t) = a^* + (a_0 - a^*)\, e^{-(\mu + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2)t} \tag{256}$$

donde

$$a^* = \frac{\mu}{\mu + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2} \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{A_2^0}{A_1^0} \tag{257}$$

de manera que en el largo plazo ($t \to \infty$):

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = a^* = \frac{\mu}{\mu + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2} \tag{252}$$

c) por el supuesto 3, podemos escribir:

$$\frac{\dot{A}_2}{A_2} = \chi_2 l_2 + \mu\left(\frac{A_1 - A_2}{A_2}\right) = \chi_2 l_2 + \mu\left(\frac{1}{a} - 1\right) \tag{258}$$

En particular, para el largo plazo (258) queda de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\dot{A}_2}{A_2}\right)^* = \chi_2 l_2 + \mu\left(\frac{1}{a^*} - 1\right) \tag{259}$$

Sustituyendo (252) en (259):

$$\left(\frac{\dot{A}_2}{A_2}\right)^* = \chi_2 l_2 + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2 \tag{260}$$

luego

$$\left(\frac{\dot{A}_2}{A_2}\right)^* = \chi_1 l_1 = \left(\frac{\dot{A}_1}{A_1}\right)^* = \frac{\dot{A}_1}{A_1} \quad \square$$

PROPOSICIÓN 3.6. Para las economías nacionales descritas en la sección 3.4, la evolución del capital físico medido en unidades eficientes de trabajo, está dada por:

$$\dot{k}_i = s_i (1 - l_i)^{1-\alpha} k_i^\alpha - \left(\delta + n_i + \dot{A}_i/A_i\right) k_i \tag{261}$$

De forma que en el sistema existe un punto de equilibrio no trivial tal que

$$k_i^* = \left(\frac{s_i}{\delta + n_i + \chi_1 l_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1 - l_i) \tag{262}$$

$$y_i^* = \left(\frac{s_i}{\delta + n_i + \chi_1 l_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - l_i) \tag{263}$$

Además, en el largo plazo la tasa de crecimiento de la producción per cápita para ambos países es de

$$\left(\frac{\dot{\bar{y}}_i}{\bar{y}_i}\right)^* = \chi_1 l_1 \tag{264}$$

donde $i = 1, 2$, representan al país líder en tecnología y al país seguidor, respectivamente. *Demostración.* Sea $k_i = K_i/(A_i L_i)$ el capital en unidades eficientes de trabajo, luego por propiedades logarítmicas:

$$\frac{\dot{k}_i}{k_i} = \frac{\dot{K}_i}{K_i} - \left(\frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{\dot{L}_i}{L_i}\right) = \frac{\dot{K}_i}{K_i} - \left(\frac{\dot{A}_i}{A_i} + n_i\right) \tag{265}$$

Si sustituimos (247) en (265), se tiene que

$$\frac{\dot{k}_i}{k_i} = \frac{s_i Y_i - \delta K_i}{K_i} - \left(\frac{\dot{A}_i}{A_i} + n_i\right) = s_i \frac{y_i}{k_i} - \delta - \left(\frac{\dot{A}_i}{A_i} + n_i\right)$$

$$\Rightarrow \dot{k}_i = s_i y_i - \left(\delta + \frac{\dot{A}_i}{A_i} + n_i\right) k_i \tag{266}$$

La producción en unidades laborales eficientes la obtenemos de (246):

$$y_i = \frac{Y_i}{A_i L_i} = \frac{K_i^\alpha \left[A_i \left(1 - l_i\right) L_i\right]^{1-\alpha}}{A_i L_i} = \frac{K_i^\alpha \left[A_i \left(1 - l_i\right) L_i\right]^{1-\alpha}}{\left(A_i L_i\right)^\alpha \left(A_i L_i\right)^{1-\alpha}} = \left(1 - l_i\right)^{1-\alpha} \left(\frac{K_i}{A_i L_i}\right)^\alpha \left(\frac{A_i L_i}{A_i L_i}\right)^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow y_i = \left(1 - l_i\right)^{1-\alpha} k_i^\alpha \tag{267}$$

Sustituyendo (267) en (266), nos queda la evolución temporal de k_i:

$$\dot{k}_i = s_i \left(1 - l_i\right)^{1-\alpha} k_i^\alpha - \left(\delta + \frac{\dot{A}_i}{A_i} + n_i\right) k_i \tag{261}$$

En estado estacionario, $\dot{k}_i = 0$, y esta condición se cumple en el equilibrio trivial $k_i = 0$, pero también en el siguiente punto $k_i^* = \left[s_i / \left(\delta + n_i + \chi_1 l_1\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right) \neq 0$, pues

$$\begin{aligned} \dot{k}_i \left(k_i^*\right) &= s_i \left(1 - l_i\right)^{1-\alpha} \left[\left(\frac{s_i}{\delta + n_i + \chi_1 l_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right)^\alpha\right] \\ &\quad - \left[\delta + \left(\frac{\dot{A}_i}{A_i}\right)^* + n_i\right] \left[\left(\frac{s_i}{\delta + n_i + \chi_1 l_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right)\right] \end{aligned}$$

Sustituyendo (253) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \dot{k}_i \left(k_i^*\right) &= s_i \left(1 - l_i\right)^{1-\alpha} \left[\left(\frac{s_i}{\delta + n_i + \chi_1 l_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right)^\alpha\right] \\ &\quad - \left(\delta + \chi_1 l_1 + n_i\right) \left[\left(\frac{s_i}{\delta + n_i + \chi_1 l_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right)\right] \end{aligned}$$

$$\dot{k}_i \left(k_i^*\right) = s_i \left(1 - l_i\right) s_i^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1}{\left(\delta + n_i + \chi_1 l_1\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} - s_i^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right) \left(\delta + \chi_1 l_1 + n_i\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\dot{k}_i \left(k_i^*\right) = s_i^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right) \frac{1}{\left(\delta + n_i + \chi_1 l_1\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} - s_i^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 - l_i\right) \frac{1}{\left(\delta + n_i + \chi_1 l_1\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

con esto, concluimos que

$$\dot{k}_i \left(k_i^*\right) = 0$$

luego, k_i^* es un punto de equilibrio no trivial de (261). Además, por (267) también se tiene:

$$y_i^* = (1-l_i)^{1-\alpha}\,(k_i^*)^{\alpha}$$

$$y_i^* = (1-l_i)^{1-\alpha}\left[\left(\frac{s_i}{\delta+n_i+\chi_1 l_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-l_i)^{\alpha}\right] = (1-l_i)\left(\frac{s_i}{\delta+n_i+\chi_1 l_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{263}$$

Para finalizar, retomamos la relación entre las variables per cápita ($\bar{y}_i$) y las variables por unidad eficiente de trabajo (y_i):

$$y_i = \frac{Y_i}{A_i L_i}; \qquad \bar{y}_i = \frac{Y_i}{L_i} = y_i A_i \tag{268}$$

en estado estacionario (largo plazo), y_i no crece, i.e. $\dot{y}_i = 0$; por tanto, la correspondiente tasa de crecimiento per cápita resulta ser

$$\left(\frac{\dot{\bar{y}}_i}{\bar{y}_i}\right)^* = \frac{\dot{y}_i}{y_i} + \left(\frac{\dot{A}_i}{A_i}\right)^* = 0 + \chi_1 l_1 = \chi_1 l_1 \qquad \square$$

Como puede verse, al introducir nuestra versión extendida de Nelson–Phelps en el modelo de Solow–Swan, se corroboran los resultados en estado estacionario de la versión solowiana del crecimiento, aunque debe destacarse que sí hay cambios en la dinámica de transición o de corto plazo; es decir, la forma de aproximarse al estado k_i^* ó y_i^*, es diferente a la versión original a la estudiada en el capítulo 1. Sin embargo, el aspecto más relevante ocurre con las tasas de progreso técnico, que son el verdadero motor del crecimiento en Solow–Swan y cuya dinámica hemos analizado con mayor detalle en esta sección.

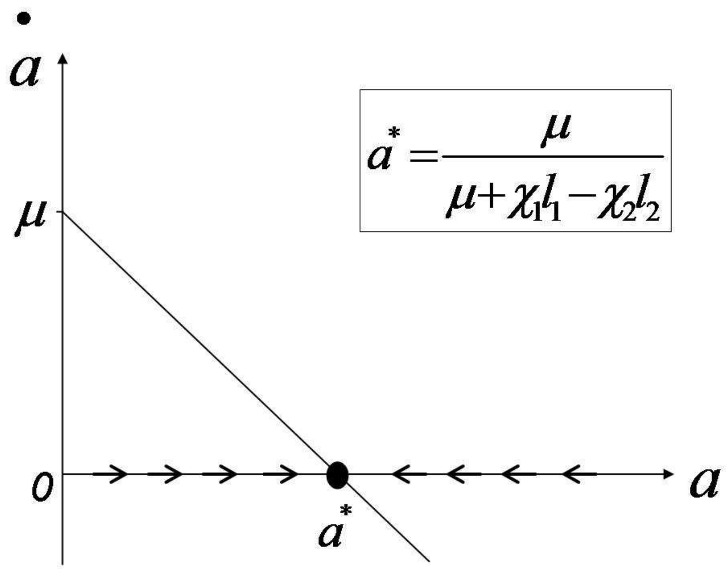

Figura 3.3. Comportamiento convergente de la proporción tecnológica entre países.

Centremos la atención en el equilibrio a^*, pues permite una posibilidad muy importante en el modelo, que es la de "overtake" o "rebase tecnológico" en la terminología de nuestro análisis. Obsérvese que en (252), se tienen los siguientes casos:
(1) Si $\chi_1 l_1 > \chi_2 l_2$, entonces $a^* < 1$, i.e. $A_1^* > A_2^*$.
(2) Si $\chi_1 l_1 < \chi_2 l_2$, pero $\mu + \chi_1 l_1 > \chi_2 l_2$, entonces $a^* > 1$, i.e. $A_1^* < A_2^*$.
(3) Si $\mu + \chi_1 l_1 < \chi_2 l_2$, entonces $a^* < 0$ (y este caso no tiene sentido).
¿Qué significa esto? El primer caso indica la condición que se cumple para que permanezca la posición de país líder y país rezagado en las economías bajo estudio. Aquí no habría cambios de liderazgo tecnológico, todo seguiría igual. Aunque la existencia de a^* expresa que habrá una "convergencia tecnológica" en el sistema, i.e. las economías convergerán a una proporción tecnológica fija, el detalle es que se mantendrán los papeles de país líder y país seguidor ($a^* \in [0, 1)$).
La segunda situación sugiere que en el largo plazo, se presentará el esperado "rebase", esto es, la tecnología de la región Sur superará a la de la región Norte ($a^* \in [0, \infty)$). Como puede verse, esto requiere una mayor inversión en I+D y un mayor número de científicos y tecnólogos en la región Sur, que los presentes en el Norte.
El último caso, muestra la restricción que deben verificar los parámetros para evitar una situación irreal en la definición de $a(t)$ ó a^*.
Lo conveniente para un país tecnológicamente rezagado como, por ejemplo, México, es que al menos $\chi_1 l_1 = \chi_2 l_2$, pues en ese escenario se tendrá

$$a^* = \frac{\mu}{\mu + \chi_1 l_1 - \chi_2 l_2} = 1 \tag{269}$$

lo cual implica que, si bien México no rebasaría al país líder, (por decir algo, Estados Unidos), tampoco persistiría el rezago en el largo plazo, simplemente emparejaría su posición respecto al líder (el rezago desaparecería).
Por último, debe recordarse que el argumento anterior es importante puesto que a la luz del modelo de Solow, un cambio en el liderazgo tecnológico implica también un cambio en el liderazgo de crecimiento.

Capítulo 4. El Sector Informal.

Un tema recurrente en los medios de comunicación es la llamada economía informal. Mucho se alude a su efecto negativo y a su constante crecimiento en deterioro del sector formal, así como a operativos policiacos instrumentados para combatirla; además, frecuentemente los reportes van acompañados de fuerte evidencia estadística que sustenta su avance. Sin embargo, esas no son todas las malas noticias. En realidad, los estudios serios sobre el tema están rodeados de incertidumbre no sólo por cómo medir correctamente la economía informal sino porque de entrada, no hay consenso en cuanto a su definición. De esta manera, enfrentar la cuestión de qué es y qué efectos tiene exactamente el sector informal en la economía, es una pregunta difícil de responder.
En este capítulo abordaremos algunos aspectos introductorios al respecto así como la modelación de esta variable como un elemento relevante en el proceso de crecimiento económico.

4.1. INTRODUCCIÓN.

Para que un gobierno pueda cumplir con sus obligaciones ante la sociedad que representa, debe contar con un mínimo de ingresos que le permitan llevar a cabo acciones para mejorar el bienestar general, como por ejemplo una adecuada provisión de servicios públicos: drenaje, alumbrado, agua potable, redes carreteras, seguridad y justicia, etc.; y una de las formas que los gobiernos tienen para hacerse de recursos es por medio de su sistema tributario. En este sentido, es preocupante la situación en México donde en 2004 los ingresos fiscales representan apenas el 18.5 % del PIB, en contraste con los países miembros de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) que alcanzan una recaudación del 36.4 % en promedio (datos tomados de Calva, p. 11). Una forma de superar este rezago recaudatorio, es incorporar a la denominada "economía informal" al régimen tributario, sin embargo esta posibilidad presenta dificultades.

Para empezar, en la literatura económica no hay acuerdo sobre la definición de "economía informal", y por ende sobre cómo medirla de manera que se pueda determinar su tamaño o presencia respecto a la economía de un país. Además, hay varias formas de referirse a ella: economía subterránea, economía sombra, economía escondida, y por supuesto, economía informal. En general, puede decirse que estos términos denotan a todas aquellas actividades que no están reguladas por el gobierno, aunque esta posible definición también incluye a las actividades delictivas como el narcotráfico o la piratería, por ejemplo.

Siguiendo a Flores–Curiel *et al*, una aproximación al tema puede hacerse mediante el vínculo entre definición y metodología de medición. Bajo este esquema, se denomina economía subterránea a la que está compuesta de actividades económicas legales e ilegales no registradas en las cuentas nacionales. Este sector se estima de forma indirecta siguiendo las huellas que dejan sus actividades, para lo cual se toma en consideración que hay una relación directa entre las actividades económicas y el consumo de energía (electricidad) o el uso de dinero; así, "se atribuye a la economía subterránea los cambios en estas variables que no son explicados por el crecimiento del PIB" (Flores–Curiel *et al*, p.138).

Por otro lado y siguiendo a los mismos autores, en base a un método directo de medición, llamaremos economía informal al sector de empresas que no están registradas o que no registran a sus empleados. La medición de este sector se hace a partir de encuestas de empleo o económicas y que se aplican a la población o a las empresas, respectivamente (una limitante obvia en este enfoque radica en la falta de veracidad en la información recabada). Esta última es la definición con la que trabajaremos aquí y agrupa actividades tales como: comercio al menudeo, servicios de reparación, servicios de taxis y rutas de transportación fijas, venta de alimentos en la vía pública, construcción residencial, etc.

Estas dos aproximaciones al tema de la informalidad son relevantes pues permiten distinguir entre acciones de combate o acciones de formalización (fiscalización). Las primeras, serían la única opción para aquellas actividades ilícitas como el narcotráfico que están incluidas en la economía subterránea, pero que no son fiscalizables y más bien deben combatirse hasta su desaparición. Por el contrario, la economía informal aquí descrita puede ser combatida o fiscalizada, en función de lo que sea mejor en términos recaudatorios, pues como veremos a continuación, la formalización indiscriminada dista de ser óptima. Un estudio reciente de Chapa, Flores y Valero (2003) sugiere que en el caso del ISR (Impuesto sobre la Renta), la formalización podría ser fuente de recaudación fiscal solo bajo ciertas condiciones de selectividad, pues de lo contrario puede llegarse a una situación en la que los trabajadores terminen recibiendo recursos en lugar de aportarlos, por razón de que sus ingresos son bajos en promedio y de conceptos como subsidios y créditos al salario. Además, estos autores encontraron que ante la integración del IVA (Impuesto al Valor Agregado) y del ISR como potencial recaudación, ésta sólo alcanzaría un 0.42 % del PIB, mientras que el mismo número de personas en el sector formal ya aporta un 10 %; y eso sin olvidar que el esfuerzo de la hacienda pública sería importante pues estamos hablando de incorporar a la formalidad a un número de personas equiparable al ya existente. Como puede verse, el tratamiento del sector informal es un problema complejo y en el análisis de Chapa, Flores y Valero la propuesta es una fiscalización selectiva.

Pese a esta argumentación, cabe retomar a Schneider y Enste (2000) quienes optan por el combate del sector. Schneider y Enste mencionan tres razones importantes para eliminar la economía informal: a) su avance incentiva a que las autoridades eleven las tasas de impuestos a quienes sí pagan; b) en ciertas ramas, el sector informal tiende a desplazar al formal; c) cuando el sector informal crece, entonces el formal pierde presencia, por lo que es más difícil monitorear el comportamiento real de la economía, de forma que las decisiones de gobierno tomadas a partir de ese comportamiento tienden a ser menos adecuadas por lo que se pierde efectividad en las acciones destinadas a brindar bienestar.

La opinión de Schneider y Enste goza de apoyo, y en general, puede decirse que hay un consenso entre los especialistas en torno a la idea de que haya una economía formal con mayor presencia en los países; no obstante, la controversia sigue en torno a cómo abatir la informalidad de manera óptima y sobretodo en la implementación de las hipotéticas medidas.

4.2. MODELOS DE CRECIMIENTO CON ECONOMÍA INFORMAL.

Por lo general, en los modelos de crecimiento económico la economía informal no es un aspecto muy socorrido, como por ejemplo, sí lo es el papel que el gobierno y las políticas de impuestos desempeñan en el crecimiento y el bienestar social. Sin embargo, hay un número creciente de estudios que centran su atención en el papel que el sector informal juega en la economía, buena parte de ellos realizados por autores con raíces latinas. En esta sección, mostraremos algunos desarrollos recientes en torno a esta problemática, partiendo de un trabajo clásico en el área: el de Harris y Todaro.

4.2.1. Modelo de Harris–Todaro. En la propuesta de Harris y Todaro (1969), centrada en las naciones en vías de desarrollo, se concibe a la informalidad como el empleo momentáneo o temporal para los trabajadores que migran del campo a las ciudades, en tanto obtienen un empleo formal. Si bien es el modelo clásico en el tratamiento del sector informal, su objetivo principal radica en el análisis de la persistencia y aparente aceleración de la migración rural–urbana, a pesar de que en las comunidades urbanas hay importantes niveles de desempleo.

En concreto, Harris y Todaro asumen que los trabajadores rurales toman decisiones de migración tras comparar el salario actual en el sector agrícola contra el salario urbano esperado, que se calcula multiplicando el salario mínimo en la ciudad por la probabilidad de encontrar empleo, de tal manera que, mientras que los salarios urbanos esperados superen a los salarios agrícolas, persistirá la migración del campo a las ciudades.

4.2.2. Modelo de Brambila. Dos variables muy de la mano como son la migración y las remesas, se han vuelto relevantes para el análisis económico en los últimos años, junto

con el creciente avance del sector informal. Gracias a la globalización, estos tres aspectos han incrementado significativamente su peso en la macroeconomía, "especialmente en países en desarrollo como México, donde las remesas son la tercera fuente de ingresos, después del petróleo y el turismo".[27]
En 2008, Brambila desarrolló un modelo de crecimiento endógeno que considera remesas y la coexistencia del sector forma e informal en la función de producción; como sigue:

$$Y = AK^{\alpha}\left(F^{\psi}S^{1-\psi}\right)^{1-\alpha}; \qquad 0<\alpha<1, \qquad 0<\psi<1. \tag{270}$$

donde Y es la producción en la economía, A es el parámetro usual de tecnología exógena, K es el capital variable, y el trabajo agregado[28] está integrado por trabajo formal, F, y trabajo informal, S.
Hacemos notar que el autor considera sólo al sector laboral informal como potenciales migrantes y que las remesas incrementan el ingreso pero sin pagar impuestos. De esta manera, la restricción presupuestaria de la economía toma la siguiente forma (en unidades intensivas):

$$\dot{k} = y - c - (n+\delta)\,k + rem \tag{271}$$

donde el término rem se refiere a remesas y δ es la depreciación del capital. Por otro lado, aclaramos que Brambila define informalidad como la fracción de la fuerza laboral que está completamente desregulada, y ésta incluye trabajos no registrados ante la Hacienda Pública, mano de obra no capacitada y sin seguridad social, inmigrantes clandestinos a los que no se les permite laborar en un país extranjero, etc.
Con este modelo, Brambila pudo analizar la interacción entre la informalidad asociada a las remesas y la migración así como su consecuente afectación en el crecimiento de México. En concreto, a partir del modelo Brambila corroboró que las remesas juegan un papel crucial al incrementar la restricción presupuestaria mexicana; sin embargo, también encontró que la misma posibilidad de migración que sustenta el envío de remesas, drena la fuerza laboral agregada. Pese a ello, a la luz del modelo, la magnitud de las remesas potenciales es capaz de subsanar esta pérdida y tener por tanto un efecto global positivo en el crecimiento económico.

4.2.3. Modelo de Braun y Loayza. Braun y Loayza elaboraron en 1994 un modelo dinámico en el que el sector informal aparece cuando la sobrerregulación[29] se combina con un sistema gubernamental corrupto e ineficiente. Los autores consideraron una tecnología productiva en la cual los servicios públicos son esenciales y están sujetos a congestión. Como es habitual, los servicios públicos se financian con impuestos recaudados en el sector formal; por supuesto, los productores informales evaden impuestos y, debido a su estatus ilegal, pueden utilizar sólo algunos servicios públicos[30]. Un punto destacable es que los productores en el sector informal están sujetos a sanciones estocásticas.
Braun y Loayza mostraron que en el marco de su modelo, el tamaño del sector informal se relaciona negativamente con la severidad de las sanciones gubernamentales, en tanto que su relación es positiva con la tasa de impuestos. También encontraron que las economías con mayores sectores informales tienen menores tasas de crecimiento y menores rendimientos del

[27] Brambila (2008), p. 3.
[28] La función de trabajo agregado es $L = F^{\psi}S^{1-\psi}$.
[29] Entendida como la aplicación de altas tasas de impuestos y un alto costo de entrada al sector formal.
[30] Por ejemplo, no pueden emplear o hacer uso de mercados de capital.

capital, debido a que la contribución de los servicios públicos a la productividad, disminuye con la informalidad. Por último, los autores argumentan que las burocracias interesadas en el sector (corruptas), crean un ambiente económico que hace atractiva la informalidad o la vuelven inabordable debido a que en realidad se benefician del sector informal.

4.2.4. Modelo de Loayza. En un trabajo publicado en 1996, Norman Loayza continúa el análisis anterior, presentando el punto de vista de que la economía informal fortalece su presencia cuando los gobiernos imponen impuestos y regulaciones excesivas. En este estudio, se abordan los determinantes y los efectos del sector informal en un modelo de crecimiento endógeno cuya tecnología productiva depende esencialmente de servicios públicos congestionables, como sigue:

$$y^F = (1-\tau)\, A \left(\frac{g}{y}\right)^{\alpha} k, \qquad 0 < \tau < 1 \tag{272}$$

$$y^I = (1-\pi)\, A \left(\frac{\delta g}{y}\right)^{\alpha} k, \qquad 0 < \pi < 1 \tag{273}$$

donde y^F, y^I representan la producción en el sector formal e informal, respectivamente; τ es la tasa de impuestos, π es la tasa de penalización, g es el flujo de servicios públicos, y es la producción total en la economía, δ es la fracción de servicios públicos disponible para el sector informal, A es un parámetro de productividad exógena; por último, α es la elasticidad del producto respecto a g/y, y mide la productividad de los servicios públicos en relación a los servicios privados.[31]
A partir del modelo, se observa que cuando los parámetros de política y calidad de las instituciones gubernamentales cambian de tal forma que se promueve una mayor presencia de la economía informal, entonces estos cambios en los parámetros de gobierno también generan una reducción en la tasa de crecimiento económico.
Posteriormente, el autor evalúa las conclusiones del modelo con datos de países latinoamericanos a principios de los 1990's y proporciona estimaciones del tamaño del sector informal en estos países. Se encuentra que la mayor o menor presencia del sector informal depende positivamente de las restricciones para ingresar al mercado laboral y negativamente de la calidad de las instituciones gubernamentales. Además, los resultados empíricos sugieren que al haber mayor economía informal, el crecimiento se ve afectado negativamente. Esto último es explicado por el autor con el argumento de que la afectación negativa se produce de dos formas: primero, porque al haber mayor sector informal se reduce la disponibilidad de servicios públicos en la economía; y segundo, porque con mayor sector informal habrá más actividades productivas que utilizan de forma poco eficiente los servicios públicos existentes o bien que no utilizan ninguno; así, con una menor eficiencia productiva, el crecimiento se reduce.

4.2.5. Modelo de Easterly. En 1993, William Easterly desarrolló un modelo de crecimiento endógeno con dos tipos de capital los cuales pueden exhibir efectos muy importantes

[31] Cabe señalar que tanto en este estudio como en el de Braun y Loayza, se están empleando funciones de producción del tipo AK para modelar la producción en ambos sectores, el formal y el informal.

de políticas distorsionadoras en el largo plazo.[32]

El modelo aplica a muchos y diferentes tipos de distorsiones de precios relativos, comunes en los países en desarrollo, como impuestos y tarifas diferenciados, tasas de intercambio en el mercado negro, y controles de precios.

Nosotros nos concentraremos en una de las versiones del modelo: aquella en la que el producto es una función CES de dos tipos de capital con elasticidad de sustitución $\frac{1}{\varepsilon-1}$ y hay un impuesto a la inversión en el sector formal.[33] Por simplicidad, Easterly asume una población fija y la tecnología como un parámetro. Además, la economía está cerrada tanto al comercio exterior como a los flujos del capital.

La función de producción es como sigue:

$$Y = A\left[\gamma K_1^{\varepsilon} + (1-\gamma)\, K_2^{\varepsilon}\right]^{1/\varepsilon} \tag{274}$$

Los dos tipos de capital se denotan por K_1 para el capital formal y K_2 para el capital del sector informal, los cuales se definen en términos de su ubicación, propiedad y visibilidad ante las autoridades hacendarias. La distorsión considerada es un impuesto a las ventas sobre las compras de inversión en el sector formal, compras de inversión que evade el sector informal.

El autor considera familias idénticas de productores–consumidores con vida infinita, que maximizan el valor presente descontado de la utilidad o bienestar de consumo futuro:

$$B = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\, \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} dt \tag{275}$$

donde σ es la elasticidad intertemporal de sustitución.[34]

El consumo está dado por el exceso del ingreso sobre el gasto en inversión:

$$C = Y - (1+\tau)\, I_1 - I_2 + T \tag{276}$$

donde τ es la tasa de impuestos en las ventas sobre las compras de bienes de inversión del primer tipo (i.e. impuestos en el sector formal). La variable T es la transferencia de suma fija por ingresos públicos que regresan a los consumidores, ex post igual a τI_1, pero tratado por el consumidor como fijo. Sin embargo, el crecimiento no se ve afectado si estos ingresos no se devuelven al consumidor.

[32] El término de distorsión aquí citado se refiere a que la aplicación del impuesto influye en las decisiones de los agentes, es decir, distorsiona o altera su conducta. Por ejemplo: “la legislación fiscal en Estados Unidos considera casada a una pareja durante todo el año fiscal, aún cuando la boda se celebre el 31 de diciembre. Por lo tanto, una pareja que trabaje, que gane lo mismo y que tenga que elegir entre casarse en diciembre o en enero, tendrá muchos incentivos para elegir enero, puesto que en la mayoría de los casos tributarán más estando casados que permaneciendo solteros; Stiglitz, p. 431 y 432 (1995). Así, se dice que “existen distorsiones cuando el individuo intenta alterar sus obligaciones fiscales”: Stiglitz, p. 433 (1995). En este sentido y en relación con el tema de este capítulo y con el modelo de la sección 1.12 (gasto público y crecimiento), “el suministro de bienes públicos afecta los incentivos a ahorrar e invertir, dado que los impuestos necesarios para financiarlos introducen distorsiones en la rentabilidad de la inversión”; Sala-i-Martin, p. 144 (2000). Finalizamos señalando: “la historia de los impuestos está llena de efectos distorsionadores. Cuando en Gran Bretaña se creó un impuesto sobre las ventanas, el resultado fue la construcción de casas sin ventanas”, Stiglitz, p. 431 (1995).

[33] La elasticidad de sustitución es una medida porcentual que indica el grado de sustituibilidad de unos factores de producción por otros, sin que varíe el producto; Vázquez–Pérez p. 551, 1969.

[34] Cuyo significado abordamos primero en el modelo de Ramsey.

Las ecuaciones de acumulación del capital son:

$$\dot{K}_1 = I_1 - \delta K_1 \tag{277}$$

$$\dot{K}_2 = I_2 - \delta K_2 \tag{278}$$

donde δ es la tasa de depreciación, asumida como igual entre los dos tipos de capital para simplificar el álgebra. Easterly no impone explícitamente la condición de que la inversión es irreversible.
El bienestar en el modelo de Easterly resulta

$$B = \frac{(C_k K_0)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\left[\frac{1}{\rho - g(1-\sigma)}\right] \tag{279}$$

donde K_0 es el nivel inicial del stock total de capital ($K_0 = K_1^0 + K_2^0$) y C_k es la proporción de consumo a stock total de capital, dada por

$$C_k = \frac{C}{K_1 + K_2} = (r_2 - \delta)\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\rho}{\sigma} + \frac{r_2 \tau}{1+\Phi} \tag{280}$$

y donde Φ es la proporción de capitales ($\Phi = K_2/K_1$).
A continuación y antes de presentar el modelo desarrollado con motivo de esta tesis, presentaremos brevemente una descripción de dos conceptos relevantes para su comprensión: los impuestos distorsionadores y los bienes públicos congestionables.

IMPUESTOS DISTORSIONADORES.

Seguimos a Joseph Stiglitz (1988) en la definición de impuestos distorsionadores como aquellos en los que por razón de su aplicación, provocan que el individuo trate de alterar sus obligaciones fiscales; por cierto que este autor menciona también que "casi todos los impuestos que existen en los países occidentales son distorsionadores en este sentido".[35] Un par de ejemplos típicos de este tipo de impuestos están vinculados a las ventanas: en Gran Bretaña, cuando se creó un impuesto por tenencia de ventanas en los hogares, la consecuencia fue que se contruyeron casas sin ventanas; en este mismo país pero en fechas más recientes, debido a que "los vehículos de tres ruedas, aunque quizá son menos seguros y no mucho más baratos que los de cuatro, pagaban menos impuestos que los segundos, por lo que muchas personas los elegían frente a los más convencionales de cuatro ruedas".[36] Un tercer ejemplo tiene que ver con las decisiones de casarse o divorciarse. En Estados Unidos, la legislación fiscal considera que aún si se contrajo matrimonio el 31 de Diciembre, la pareja será tomada en cuenta como casada durante todo el año fiscal; por esta razón, cuando ambos contrayentes trabajan y tienen que elegir entre casarse en diciembre o en enero, entonces tienen más incentivos para escoger enero, pues de lo contrario pagarán más impuestos ya casados que si continuaran solteros.

[35] Stiglitz (1988), p. 433.
[36] Stiglitz (1988), p. 431.

BIENES PÚBLICOS CONGESTIONABLES.

Decimos que un bien público está sujeto a congestión o es congestionable,[37] cuando un número suficiente de agentes económicos hace uso de ellos de forma tal que terminan saturándose, como pasa con las autopistas, los aeropuertos o los tribunales de justicia. El siguiente ejemplo se debe Sala–i–Martin: "En principio, no podemos evitar que alguien conduzca por la calle Balmes de Barcelona, pero si muchos conductores deciden ir por la misma calle al mismo tiempo, entonces la calle se colapsa o congestiona. De hecho, se puede argumentar que casi todos los bienes públicos entran dentro de esta última categoría".[38]

4.3. Una versión simplificada del modelo de Easterly.

La forma más sencilla de abordar el modelo de Easterly, es modificando la función de producción de tipo CES por una Cobb–Douglas, que a final de cuentas es un caso particular de la primera cuando la elasticidad de sustitución es unitaria. Hacemos esto porque estamos interesados más bien en el aspecto de la relación entre los tipos de capital productivo más que en la sustitución entre factores. Con esto en mente y conservando el resto de los supuestos de la versión original, podemos plantear y desarrollar un análisis de la informalidad en el marco de la teoría del crecimiento.

Hacemos destacar que en la literatura, cuando se aborda el papel del gobierno y los impuestos en el crecimiento económico, el énfasis está dirigido generalmente a la obtención de impuestos óptimos en el sentido de la tasa de crecimiento y/o del bienestar social, y no siempre estos óptimos son coincidentes. Sin embargo, en nuestro conocimiento, no se han realizado análisis similares enfocados más bien a la presencia de proporciones óptimas entre capital formal/informal, como haremos a continuación.

4.3.1. SUPUESTOS. La versión que manejaremos en esta tesis, parte de las siguientes hipótesis:

I. Se produce un solo bien en la economía, y la producción total del mismo, Y, se destina al consumo o a la inversión:

$$Y = C + I_B \tag{1}$$

II. El ahorro sigue siendo igual a la inversión bruta:

$$S = I_B \tag{2}$$

pero ahora el ahorro (y por ende, el consumo) no es una fracción constante del ingreso como en Solow, sino que es resultado de un proceso optimizador de los agentes como en Ramsey.

III. El producto total se obtiene por la combinación de tres insumos: el capital formal (K_F), el capital informal (K_I) y la mano de obra (L):

$$Y = F\left(K_F, K_I, L\right) \tag{281}$$

[37] También se dice que es un bien público parcialmente excluible.

[38] Sala–i–Martin (2000), p. 137.

siendo $F(K_F, K_I, L)$ tal que $F : \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, una función de producción de tipo neoclásico; luego, $F(K_F, K_I)$ posee las características descritas en la sección 1.3.1. Específicamente, utilizaremos la forma Cobb–Douglas:

$$Y = AK_F^{\alpha} K_I^{1-\alpha} \tag{282}$$

con A como un parámetro tecnológico.
IV. La variación neta de cada forma de capital está gobernada por:

$$\dot{K}_F = I_F - \delta K_F \tag{278}$$

$$\dot{K}_I = I_I - \delta K_I \tag{279}$$

con $\delta \in (0, 1)$ como tasa de depreciación del capital, y donde $I_B = I_F + I_I$.
V. La fuerza laboral L se considera fija:

$$\frac{\dot{L}}{L} = 0$$

Más aún, por simplicidad la tomaremos como estandarizada en la unidad $(L = 1)$.
VI. Los servicios públicos M están modelados como sigue:

$$M = C_0 \ \Phi^{-\alpha} \tag{283}$$

donde C_0 es el consumo inicial y Φ se describe en las Definiciones 4.1 y 4.2. Los servicios públicos M son financiados por el gobierno mediante un impuesto a la inversión.
DEFINICIÓN 4.1. Nos referiremos como sector informal a aquel que no paga impuestos, sin incluir aquí a actividades como el narcotráfico, robos, etc.
DEFINICIÓN 4.2. Denotaremos como Φ a la tasa de capital informal a formal en la economía ($\Phi = K_I/K_F$, tal que $\Phi \in [0, \infty)$).
VII. El bienestar de cada individuo se conforma por la contribución tanto del consumo como de la provisión de servicios públicos, de acuerdo con:

$$u = \frac{(C + M)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} \tag{284}$$

donde θ tiene el significado que ya hemos manejado.

4.3.2. VARIABLES PER CÁPITA. Por el supuesto de homogeneidad de grado uno (rendimientos constantes a escala) en la función de producción al ser ésta de naturaleza neoclásica, podemos emplear las siguientes variables auxiliares definidas en términos per cápita:

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K_F, K_I, L)}{L} = \frac{AK_F^{\alpha} K_I^{1-\alpha}}{L} = \frac{AK_F^{\alpha} K_I^{1-\alpha}}{L^{\alpha} L^{1-\alpha}} : y = Ak_F^{\alpha_F} k_I^{\alpha_I} \tag{285}$$

donde y, k_F, y k_I se refieren a la producción, capital formal y capital informal todos per cápita.
Veamos ahora una serie de resultados en torno a la presentación de las variables y que serán muy útiles.

PROPOSICIÓN 4.1. Bajo condiciones de competencia perfecta, el impuesto distorsionador τ influye en los productos marginales de los dos tipos de capital, como sigue:

$$\frac{\partial Y/\partial K_F}{\partial Y/\partial K_I} = 1 + \tau \tag{286}$$

Demostración. Sea p el precio del producto nacional y w_F, w_I, el precio de los factores productivos, con Y, K_F y K_I, como antes.
En un mercado de competencia perfecta, las empresas maximizan su función de beneficio y las demandas de los factores se obtienen resolviendo el problema:

$$\begin{gathered} \text{Maximizar } B\left(K_F, K_I\right) = \text{ingresos } - \text{costos} \\ B\left(K_F, K_I\right) = pY - \left(w_F K_F + w_I K_I\right) \\ \\ \text{Sujeto a } \; Y = Y\left(K_F, K_I\right) \end{gathered} \tag{287}$$

que equivale al problema sin restricciones:

$$\text{Maximizar } B\left(K_F, K_I\right) = pY\left(K_F, K_I\right) - \left(w_F K_F + w_I K_I\right) \tag{288}$$

donde $w_I = w$, $w_F = w + \tau w = (1+\tau)\, w$; y cuyas Condiciones de Primer Orden son:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial K_F} = p\ \frac{\partial Y}{\partial K_F} - w_F = 0 \\ \\ \frac{\partial B}{\partial K_I} = p\ \frac{\partial Y}{\partial K_I} - w_I = 0 \end{cases} \tag{289}$$

Cada una de estas condiciones implica que en el óptimo, el valor de la productividad marginal de cada factor (PMg_i) se iguala a su precio (w_i):

$$p\ \frac{\partial Y}{\partial K_i} - w_i = 0; \quad i = F, I \tag{290}$$

$$p\ \frac{\partial Y}{\partial K_i} = w_i \Rightarrow p\ \cdot PMg_i = w_i \tag{291}$$

Las Condiciones de Segundo Orden de este problema establecen que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 B}{\partial K_F^2} = p\ \frac{\partial PMg_F}{\partial K_F} < 0 \\ \\ \frac{\partial^2 B}{\partial K_I^2} = p\ \frac{\partial PMg_I}{\partial K_I} < 0 \\ \\ \frac{\partial^2 B}{\partial K_F^2}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial K_I^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 B}{\partial K_F \partial K_I}\right)^2 > 0 \end{cases} \tag{292}$$

Las dos primeras CSO se cumplen si las productividades marginales de los factores son decrecientes. La tercera condición exige que, además sean lo suficientemente decrecientes como para que los costes marginales aumenten según se incrementa la producción.
Así, para un mercado de competencia perfecta como en el que se supone está el bien nacional Y, se cumple:

$$p\ \frac{\partial Y}{\partial K_i} = p\ Y_{K_i} = w_i$$

Si asumimos que $p = 1$, entonces

$$\begin{aligned} Y_{K_F} &= w_F \\ Y_{K_I} &= w_I \end{aligned}$$

Como ya mencionams antes, el capital formal está sujeto a impuesto a una tasa τ al momento de su instalación, entonces el precio del capital formal e informal es:

$$w_F = (1+\tau)\, w$$

$$w_I = w$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{Y_{K_F}}{Y_{K_I}} &= \frac{w_F}{w_I} \\ &= \frac{(1+\tau)\, w}{w} = 1+\tau \\ &= \frac{\partial Y/\partial K_F}{\partial Y/\partial K_I} \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

PROPOSICIÓN 4.2. La tasa de sustitución marginal, R, para la función de producción de la economía considerada (ecuación (282)), está dada por:

$$R = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_F}{K_I}\right) \tag{293}$$

Demostración. Los productos marginales de la función de producción, son:

$$Y_{K_I} = \frac{\partial Y}{\partial K_I} = (1-\alpha)\, A K_F^{\alpha} K_I^{-\alpha} \tag{294}$$

$$Y_{K_F} = \frac{\partial Y}{\partial K_F} = \alpha A K_F^{\alpha-1} K_I^{-\alpha} \tag{295}$$

La tasa de sustitución marginal entre factores se define como:

$$R = \frac{Y_{K_I}}{Y_{K_F}} \tag{296}$$

luego,

$$R = \frac{(1-\alpha)\, A K_F^{\alpha} K_I^{-\alpha}}{\alpha A K_F^{\alpha-1} K_I^{-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_F}{K_I}\right)$$

y termina la prueba. □

PROPOSICIÓN 4.3. Por las Proposiciones 4.1 y 4.2, la tasa de capitales Φ puede escribirse en términos de τ de la siguiente forma:

$$\Phi = \frac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha} = cte. \tag{297}$$

Demostración. Sabemos por la Proposición 4.1, que $Y_{K_F}/Y_{K_I} = 1+\tau$ y, por la Proposición 4.2, que $R = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_F}{K_I}\right)$. Luego, por definición: $R = Y_{K_I}/Y_{K_F}$, así que por transitividad:

$$\frac{1}{1+\tau} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_F}{K_I}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{K_I}{K_F} = \frac{1-\alpha}{\alpha}(1+\tau) = \Phi$$

como se indicó en el enunciado. □

PROPOSICIÓN 4.4. La función de producción de la economía nacional (282) puede escribirse en términos de una sola de las dos formas posibles de capital, ya sea:

$$\begin{gathered} Y = Y(K_F, \Phi) = A\Phi^{1-\alpha}K_F \\ Y = Y(K_F, \tau) = A\left[\tfrac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha}\right]^{1-\alpha} K_F \end{gathered} \tag{298}$$

o bien:

$$\begin{gathered} Y = Y(K_I, \Phi) = \tfrac{A}{\Phi^\alpha}K_I \\ Y = Y(K_I, \tau) = A\left[\tfrac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\tau)}\right]^{\alpha} K_I \end{gathered} \tag{299}$$

de tal manera que las productividades marginales resultan constantes:

$$\frac{\partial Y}{\partial K_F} = A\left[\frac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha}\right]^{1-\alpha} = cte. \tag{300}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K_I} = A\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\tau)}\right]^{\alpha} = cte. \tag{301}$$

Demostración. Por la Definición 4.2, se tiene que $K_I = \Phi K_F$. Sustituyendo K_I en la función de producción, nos queda:

$$Y = Y(K_F, K_I) = AK_F^\alpha K_I^{1-\alpha} = AK_F^\alpha(\Phi K_F)^{1-\alpha} = A\Phi^{1-\alpha}K_F$$

Luego, sustituyendo (297) de la Proposición 4.3, tenemos:

$$Y = A\left[\frac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha}\right]^{1-\alpha} K_F$$

El procedimiento es análogo respecto a escribir (282) en términos de K_I ($K_F = K_I/\Phi$). Finalmente, el cálculo de las productividades marginales es directo y resultan ser valores fijos:

$$r_F = PMg_F = \frac{\partial Y}{\partial K_F} = A\left[\frac{(1-\alpha)(1+\tau)}{\alpha}\right]^{1-\alpha} = cte. \tag{300}$$

$$r_I = PMg_I = \frac{\partial Y}{\partial K_I} = A\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\tau)}\right]^{\alpha} = cte. \tag{301}$$

finalizando así la prueba. □
Hacemos notar que en (300) y (301), estamos adoptando la notación de Easterly para las productividades marginales, de manera que en lo sucesivo:

$$PMg_F = r_F$$

$$PMg_I = r_I$$

4.3.3. DINÁMICA DEL MODELO. A partir de los supuestos anteriores y procediendo a la Ramsey, podemos formular los siguientes resultados:
PROPOSICIÓN 4.5. (Tasa de crecimiento). La tasa de crecimiento de la economía descrita por los supuestos de la sección 4.3.1, puede expresarse en términos del sector formal o del sector informal de la siguiente manera:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{r_F}{1+\tau} - \delta - \rho\right) \tag{302}$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(r_I - \delta - \rho\right)\left(1 + \frac{M}{C}\right) \tag{303}$$

Demostración. El problema que encaran los agentes es el siguiente:

$$\text{Maximizar} \quad B = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \, \frac{(C+M)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \tag{304}$$

donde

$$C = Y - (1+\tau)\, I_F - I_I + T \tag{305}$$

sujeto a

$$\dot{K}_F = I_F - \delta K_F \tag{278}$$

O bien,

$$\text{Maximizar} \quad B = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \, \frac{(C+M)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \tag{304}$$

donde

$$C = Y - (1+\tau)\, I_F - I_I + T \tag{305}$$

sujeto a

$$\dot{K}_I = I_I - \delta K_I \tag{279}$$

es decir, resolvemos el problema de optimización tomando a uno solo de dos los tipos de capital como variable de control, pero no simultáneamente pues no son independientes. Observemos que el consumo agregado C es la variable de estado mientras que K_F y K_I (en problemas separados) son las variables de control.

La función hamiltoniana o hamiltoniano asociado a cada problema (por separado) es:

$$H(\cdot) = \left[e^{-\rho t} \ \frac{(C+M)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] + \lambda \left(I_F - \delta K_F \right) = [\cdots] + \lambda \left[\frac{Y+T-C-I_I}{1+\tau} - \delta K_F \right] \quad (306)$$

si trabajamos con K_F, o bien

$$H(\cdot) = \left[e^{-\rho t} \ \frac{(C+M)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] + \nu \left(I_I - \delta K_I \right) = [\cdots] + \nu \left[Y+T-C-(1+\tau) I_F - \delta K_I \right] \quad (307)$$

si trabajamos con K_I; nótese que en (306) y (307) para reducir el tamaño de la ecuación, usamos:

$$\left[e^{-\rho t} \ \frac{(C+M)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] = [\cdots]$$

Las Condiciones de Primer Orden son:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = 0 \quad (308)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K_F} = -\dot{\lambda} \quad (309)$$

si el problema de optimización se aborda con K_F como variable de control, o bien

$$\frac{\partial H}{\partial C} = 0 \quad (308)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K_I} = -\dot{\nu} \quad (310)$$

si la variable de control es K_I.
Empecemos. Lo que haremos será obtener expresiones para la tasa de crecimiento del consumo (que también es la tasa de crecimiento de la economía) en términos de cada uno de los dos tipos de capital, para lo cual, debemos abordar el problema de optimización con respecto a cada uno de los capitales (por separado) como variable de control.

a) Con K_I como variable de control. De (308), se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial C} = e^{-\rho t} \ (C+M)^{-\theta} - \nu = 0 \quad (311)$$

Nótese que para obtener (311) hemos hecho

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C} \left[\nu \left(I_I - \delta K_I \right) \right] &= \nu \frac{\partial}{\partial C} \left[Y+T-C-(1+\tau) I_F - \delta K_I \right] \\ &= \nu \cdot (-1) \\ &= -\nu \end{aligned}$$

Despejando ν, tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo (a la manera usual), llegamos a

$$\begin{aligned} e^{-\rho t}\ (C+M)^{-\theta} &= \nu \\ \ln\left[e^{-\rho t}\ (C+M)^{-\theta}\right] &= \ln\nu \\ \frac{d}{dt}\left[-\rho t-\theta\ln(C+M)\right] &= \frac{d}{dt}\ln\nu \end{aligned}$$

$$-\rho-\theta\frac{\dot{(C+M)}}{C+M}=\frac{\dot{\nu}}{\nu}$$

Si hacemos uso de (316) en lugar de $\dot{\nu}/\nu$ (más adelante se verifica su obtención):

$$\begin{aligned} -\rho-\theta\frac{\dot{(C+M)}}{C+M} &= \frac{\dot{\nu}}{\nu}=\delta-\frac{\partial Y}{\partial K_I} \\ -\rho-\theta\frac{1}{C+M}\frac{d}{dt}(C+M) &= \\ -\rho-\theta\frac{\dot{C}}{C+M} &= \delta-\frac{\partial Y}{\partial K_I} \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{C}}{C+M}=-\frac{1}{\theta}\left(\delta-\frac{\partial Y}{\partial K_I}+\rho\right)=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right) \tag{312}$$

De esta forma la tasa de crecimiento del consumo queda:

$$\begin{aligned} \dot{C} &= (C+M)\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right) \\ \dot{C} &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)C+\frac{M}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right) \\ \dot{C} &= aC+Ma \qquad (313) \\ \frac{\dot{C}}{C} &= \left(\frac{C+M}{C}\right)\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)=\left(1+\frac{M}{C}\right)\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right) \\ \frac{\dot{C}}{C} &= a\left(1+\frac{M}{C}\right) \qquad (314) \end{aligned}$$

donde

$$a=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)=\frac{1}{\theta}\left(r_I-\delta-\rho\right) \tag{315}$$

Finalmente, explicitamos el resultado $\dot{\nu}/\nu$ derivado a su vez de (310):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial K_I} &= \nu\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta\right)=-\dot{\nu}\\
\frac{\dot{\nu}}{\nu} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta\right)\\
\frac{\dot{\nu}}{\nu} &= \delta-\frac{\partial Y}{\partial K_I} \qquad (316)
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial K_I} &= \frac{\partial}{\partial K_I}\left(e^{-\rho t}\,\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial K_I}\left(I_I-\delta K_I\right)\\
&= 0+\nu\frac{\partial}{\partial K_I}\left[Y+T-C-(1+\tau)\,I_F-\delta K_I\right]\\
&= 0+\nu\cdot\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta\right)=\nu\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Ahora veamos cómo quedan las cosas si trabajamos con K_F como variable de control y no con K_I.

b) Con K_F como variable de control. De (308), se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial C}=e^{-\rho t}\,\left(C+M\right)^{-\theta}-\frac{1}{1+\tau}\,\lambda=0 \qquad (317)$$

Nótese que en (317) hemos hecho

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial C}\left[\lambda\left(I_F-\delta K_F\right)\right] &= \lambda\frac{\partial}{\partial C}\left[\frac{Y+T-C-I_I}{1+\tau}-\delta K_F\right]\\
&= \lambda\cdot\left(-\frac{1}{1+\tau}\right)\\
&= -\frac{1}{1+\tau}\,\lambda
\end{aligned}$$

Despejando λ, tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo, llegamos a

$$\begin{aligned}
e^{-\rho t}\,\left(C+M\right)^{-\theta} &= \frac{1}{1+\tau}\,\lambda\\
\ln\left[e^{-\rho t}\,\left(C+M\right)^{-\theta}\right] &= \ln\lambda-\ln\left(1+\tau\right)\\
\frac{d}{dt}\left[-\rho t-\theta\ln e^{-\rho t}\,\left(C+M\right)^{-\theta}\right] &= \frac{d}{dt}\left[\ln\lambda-\ln\left(1+\tau\right)\right]\\
-\rho-\theta\frac{\dot{\overline{(C+M)}}}{C+M} &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}-0=\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$

Si hacemos uso de (322) en lugar de $\dot{\lambda}/\lambda$ (más adelante se muestra cómo se obtiene):

$$-\rho - \theta \frac{\dot{(C+M)}}{C+M} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \delta - \frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}$$

$$\begin{aligned}
-\rho - \theta \frac{1}{C+M}\frac{d}{dt}(C+M) &= \\
-\rho - \theta \frac{\dot{C}}{C+M} &= \\
\frac{\dot{C}}{C+M} &= -\frac{1}{\theta}\left(\delta - \frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} + \rho\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\dot{C}}{C+M} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right) \tag{318}$$

Entonces, la tasa de crecimiento del consumo queda:

$$\begin{aligned}
\dot{C} &= (C+M)\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right) \\
\dot{C} &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right)C + \frac{M}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right) \\
\dot{C} &= bC + Mb \qquad (319) \\
\frac{\dot{C}}{C} &= \left(\frac{C+M}{C}\right)\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right) = \left(1 + \frac{M}{C}\right)\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right) \\
\frac{\dot{C}}{C} &= b\left(1 + \frac{M}{C}\right) \qquad (320)
\end{aligned}$$

donde

$$b = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta - \rho\right) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}r_F - \delta - \rho\right) \tag{321}$$

Por último, mostramos cómo se obtiene $\dot{\lambda}/\lambda$ a partir de (309):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial K_F} &= \lambda\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta\right) = -\dot{\lambda} \\
\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= -\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} - \delta\right) \\
\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= \delta - \frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F} \qquad (322)
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial K_F} &= \frac{\partial}{\partial K_F}\left(e^{-\rho t}\,\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)+\lambda\frac{\partial}{\partial K_F}\left(I_F-\delta K_F\right)\\ &= 0+\lambda\frac{\partial}{\partial K_F}\left[\frac{Y+T-C-I_I}{1+\tau}-\delta K_F\right]\\ &= 0+\lambda\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta\right)=\lambda\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta\right)\end{aligned}$$

y esto concluye la prueba. □

PROPOSICIÓN 4.6. (Trayectoria del Consumo). En la economía nacional bajo análisis, el consumo está determinado por la siguiente trayectoria temporal :

$$C\left(t\right)=\left(C_0+M\right)\ e^{\frac{1}{\theta}\left(r_I-\delta-\rho\right)t}-M \tag{323}$$

$$C\left(t\right)=\left(C_0+M\right)\ e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}r_F-\delta-\rho\right)t}-M \tag{324}$$

Demostración. Podemos describir la trayectoria temporal del consumo en términos del capital formal o del informal, el comportamiento dinámico es el mismo solo que escrito en términos distintos. Empecemos con el sector informal.

a) Con K_I como variable de control. Partiremos de (312), resolviendo la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\dot{C}}{C+M}=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right) \tag{312}$$

$$\int\frac{dC}{C+M}=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)\int dt$$

$$\begin{aligned}\ln\left(C+M\right)+\eta &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)t\\ \ln\left(C+M\right) &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)t-\eta\end{aligned}$$

donde η es una constante de integración. Despejamos $C\left(t\right)$:

$$\begin{aligned}e^{\ln(C+M)} &= e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)t-\eta}\\ C+M &= e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)t}\ e^{-\eta}\end{aligned}$$

$$C\left(t\right)=e^{-\eta}\ \cdot e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)t}-M$$

En $t=0$:

$$C\left(0\right)=e^{-\eta}\ -M=C_0\Rightarrow e^{-\eta}=C_0+M$$

luego

$$C\left(t\right)=\left(C_0+M\right)\ e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K_I}-\delta-\rho\right)t}-M$$

es decir:

$$C\left(t\right)=\left(C_0+M\right)\ e^{\frac{1}{\theta}\left(r_I-\delta-\rho\right)t}-M \tag{323}$$

De nueva cuenta, insistimos en que la expresión anterior está escrita en términos del capital informal, pero podemos obtener un resultado análogo expresado en función del sector formal, sin ningún problema.

b) Con K_F como variable de control. Resolvemos la ecuación diferencial ordinaria (318):

$$\frac{\dot{C}}{C+M}=\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right) \tag{318}$$

$$\int\frac{dC}{C+M}=\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)\int dt$$

$$\begin{aligned}\ln\left(C+M\right)+\eta &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)t\\ \ln\left(C+M\right) &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)t-\eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{\ln(C+M)} &= e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)t-\eta}\\ C+M &= e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)t}\ e^{-\eta}\end{aligned}$$

$$C\left(t\right)=e^{-\eta}\ \cdot e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)t}-M$$

Al inicio, en $t=0$:

$$C\left(0\right)=e^{-\eta}\ -M=C_0\Rightarrow e^{-\eta}=C_0+M$$

luego

$$C\left(t\right)=\left(C_0+M\right)\ e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}\frac{\partial Y}{\partial K_F}-\delta-\rho\right)t}-M$$

$$C\left(t\right)=\left(C_0+M\right)\ e^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\tau}r_F-\delta-\rho\right)t}-M \tag{324}$$

esto concluye la prueba. □

4.3.4. EL BIENESTAR. Procedamos ahora a determinar el bienestar social de la economía; como hemos podido ver en las proposiciones anteriores, los resultados pueden escribirse en términos del sector formal o del informal. En lo que sigue, expresaremos todo en función del sector informal.

PROPOSICIÓN 4.7. (Bienestar Social). En la economía descrita por los supuestos de la sección 4.3.1 y si $\rho > (1-\theta)(r_I - \delta)$, el bienestar social está dado por:

$$B = \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta\left(C_0+M\right)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)(r_I-\delta)} - \frac{1}{\rho}\right] \tag{325}$$

Demostración. De (304) sabemos que

$$B = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\ \frac{(C+M)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ \frac{(C+M)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

Calculemos la integral.

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\ \frac{(C+M)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ \frac{\left[(C_0+M)\ e^{\frac{1}{\theta}(r_I-\delta-\rho)t} - M + M\right]^{1-\theta}-1}{1-\theta}\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ \frac{\left[(C_0+M)\ e^{\frac{1}{\theta}(r_I-\delta-\rho)t}\right]^{1-\theta}-1}{1-\theta}\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ \frac{\left[(C_0+M)^{1-\theta}\ e^{\frac{1-\theta}{\theta}(r_I-\delta-\rho)t}\right]-1}{1-\theta}\ dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ \frac{\left[(C_0+M)^{1-\theta}\ e^{\frac{1-\theta}{\theta}(r_I-\delta-\rho)t}\right]}{1-\theta}\ dt - \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ \frac{1}{1-\theta}\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ e^{\frac{1-\theta}{\theta}(r_I-\delta-\rho)t}\ dt - \left(-\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-\rho t}\ (-\rho dt) \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{\left[\frac{1-\theta}{\theta}(r_I-\delta-\rho)-\rho\right]t}\ dt + \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\rho t}\right]_0^b \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{\left[\frac{1-\theta}{\theta}(r_I-\delta-\rho)-\rho\right]t}\ dt + \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta}\left[0-1\right] \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{\left[\frac{(1-\theta)(r_I-\delta-\rho)-\theta\rho}{\theta}\right]t}\ dt - \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta} \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{\left[\frac{(1-\theta)(r_I-\delta)-(1-\theta)\rho-\theta\rho}{\theta}\right]t}\ dt - \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta} \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{\left[\frac{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}{\theta}\right]t}\ dt - \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\ \frac{\theta}{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{\left[\frac{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}{\theta}\right]t}\ \left[\frac{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}{\theta}dt\right] \\
&\quad -\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta} \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\ \frac{\theta}{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}\lim_{b\to\infty}\left[e^{\frac{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}{\theta}\ t}\right]_0^b-\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Si asumimos que[39]

$$(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho<0 \Leftrightarrow (1-\theta)(r_I-\delta)<\rho,\text{ esto es: }\rho>(1-\theta)(r_I-\delta) \tag{326}$$

entonces

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^\infty e^{-\rho t}\ \frac{(C+M)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\ \frac{\theta}{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}\lim_{b\to\infty}\left[e^{\frac{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}{\theta}\ t}\right]_0^b-\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta} \\
&= \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\ \frac{\theta}{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}[0-1]-\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta} \\
&= -\ \frac{(C_0+M)^{1-\theta}}{1-\theta}\ \frac{\theta}{(1-\theta)(r_I-\delta)-\rho}-\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{1-\theta} \\
B &= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta(C_0+M)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)(r_I-\delta)}-\frac{1}{\rho}\right] \qquad (325)
\end{aligned}$$

que es el resultado indicado en el enunciado. □

PROPOSICIÓN 4.8. El bienestar de la sociedad puede expresarse como una función de la tasa de impuestos (τ) o de la proporción de capital formal a informal (Φ) como sigue:

$$B(\Phi)=\frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta C_0^{1-\theta}(1+\Phi^{-\alpha})^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left[\frac{A}{\Phi^\alpha}(1-\alpha)-\delta\right]}-\frac{1}{\rho}\right] \tag{327}$$

$$B(\tau)=\frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta C_0^{1-\theta}\left\{1+\left[\frac{(1+\tau)(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{-\alpha}\right\}^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left\{A(1-\alpha)^{1-\alpha}\left[\frac{\alpha}{(1+\tau)}\right]^{\alpha}-\delta\right\}}-\frac{1}{\rho}\right] \tag{328}$$

Demostración. Consta de un trabajo algebraico cuidadoso. Por la Proposición 4.4 y la notación de Easterly para las productividades marginales, observemos que

$$r_I=\begin{cases}\frac{A}{\Phi^\alpha}=r_I(\Phi)\\[2ex] A(1-\alpha)^{-\alpha}\left[\frac{\alpha}{(1+\tau)}\right]^{\alpha}=r_I(\tau)\end{cases} \tag{329}$$

[39]Para garantizar la convergencia de la integral de bienestar social.

Por otro lado, la relación entre Φ y la tasa de impuestos τ, establecida en la Proposición 4.3, permite desarrollar las siguientes relaciones que serán útiles en el cálculo:

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau) &= \frac{(1+\tau)(1-\alpha)}{\alpha} && (297)\\
\tau(\Phi) &= \frac{\Phi\alpha}{1-\alpha} - 1 && (330)\\
\frac{1}{1+\tau} &= \frac{1-\alpha}{\Phi\alpha} \\
1+\tau &= \frac{\Phi\alpha}{1-\alpha} && (331)
\end{aligned}$$

Y la función M puede expresarse:

$$M = \begin{cases} C_0\ \Phi^{-\alpha} = M(\Phi) \\ C_0\ \left[\frac{(1+\tau)(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{-\alpha} = M(\tau) \end{cases} \quad (332)$$

Entonces, si sustituimos (329)–(**??**) en (325), se obtienen (327) y (328):

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta(C_0+M)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)(r_I-\delta)} - \frac{1}{\rho}\right] && (325)\\
&= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta(C_0+C_0\ \Phi^{-\alpha})^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left(\frac{A}{\Phi^{\alpha}}-\delta\right)} - \frac{1}{\rho}\right] \\
&= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta C_0^{1-\theta}(1+\Phi^{-\alpha})^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)(A\Phi^{-\alpha}-\delta)} - \frac{1}{\rho}\right] && (327)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta(C_0+M)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)(r_I-\delta)} - \frac{1}{\rho}\right] && (325)\\
&= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta\left\{C_0+C_0\ \left[\frac{(1+\tau)(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{-\alpha}\right\}^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left\{A(1-\alpha)^{-\alpha}\left[\frac{\alpha}{(1+\tau)}\right]^{\alpha}-\delta\right\}} - \frac{1}{\rho}\right] \\
&= \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta C_0^{1-\theta}\left\{1+\left[\frac{(1+\tau)(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{-\alpha}\right\}^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left\{A(1-\alpha)^{-\alpha}\left[\frac{\alpha}{(1+\tau)}\right]^{\alpha}-\delta\right\}} - \frac{1}{\rho}\right] && (328)
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

Lo que sigue ahora es encontrar el valor óptimo de Φ y/o el de τ. Es decir, se trata de ver para qué valores de Φ ó de τ, se alcanzará el máximo Bienestar Social, B. Debido a que estamos interesados en el efecto de la economía informal más que de los impuestos, seguiremos manejando nuestro problema en términos de Φ. Concretamente, se trata de encontrar para qué valor de Φ, se alcanzará el máximo o mínimo Bienestar Social, B, y si éste Φ es nulo o bien $\Phi \neq 0$.
Esto se detalla en la siguiente sección.

4.3.5. BIENESTAR ÓPTIMO. En lo siguiente se aborda la minimización del bienestar social. Para ello, trabajaremos con la siguiente forma funcional en lo sucesivo:

$$B = \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{\theta C_0^{1-\theta}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left(r_I-\delta\right)} - \frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{1-\theta}\left\{\frac{\theta C_0^{1-\theta}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right)} - \frac{1}{\rho}\right\}$$

CONDICIÓN DE PRIMER ORDEN. Haremos uso de

$$B'(\Phi) = 0$$

para hallar puntos críticos. Empecemos:

$$\begin{aligned} B'(\Phi) &= \left(\frac{1}{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{\theta C_0^{1-\theta}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right)} - \frac{1}{\rho}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{\theta C_0^{1-\theta}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right)}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'(\Phi) &= \left(\frac{\theta C_0^{1-\theta}}{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}}{\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right)}\right\} \\ &= \left(\frac{\theta C_0^{1-\theta}}{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left(\frac{u}{v}\right) \\ &= \left(\frac{\theta C_0^{1-\theta}}{1-\theta}\right)\left[\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{d\Phi} - u\frac{dv}{d\Phi}\right)\right] \end{aligned}$$

Hagamos la derivación por separado:

$$\frac{du}{d\Phi} = \frac{d}{d\Phi}\left[\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}\right] = (1-\theta)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\frac{d}{d\Phi}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)$$

$$\frac{du}{d\Phi} = (1-\theta)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}(-\alpha)\,\Phi^{-\alpha-1}$$

$$\frac{du}{d\Phi} = -\alpha(1-\theta)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}$$

Luego

$$v\frac{du}{d\Phi} = -\alpha\left(1-\theta\right)\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right]\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}$$

Por otro lado,

$$\frac{dv}{d\Phi} = \frac{d}{d\Phi}\left(\rho\right) - \left(1-\theta\right)\frac{d}{d\Phi}\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right) = -\left(1-\theta\right)A\frac{d}{d\Phi}\left[\Phi^{-\alpha}\right]$$

$$\frac{dv}{d\Phi} = -\left(1-\theta\right)A\left(-\alpha\right)\Phi^{-\alpha-1}$$

$$\frac{dv}{d\Phi} = \alpha A\left(1-\theta\right)\Phi^{-\alpha-1}$$

Luego

$$u\frac{dv}{d\Phi} = \alpha A\left(1-\theta\right)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}\Phi^{-\alpha-1}$$

Reagrupando:

$$\begin{aligned}
v\frac{du}{d\Phi} - u\frac{dv}{d\Phi} &= -\alpha\left(1-\theta\right)\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right]\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1} \\
&\quad -\alpha A\left(1-\theta\right)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta}\Phi^{-\alpha-1} \\
&= -\alpha\left(1-\theta\right)\Phi^{-\alpha-1}\left\{\begin{array}{c} \left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right]\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta} \\ +\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{1-\theta} \end{array}\right\} \\
&\quad -\alpha\left(1-\theta\right)\Phi^{-\alpha-1}\left\{\begin{array}{c} \left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right]\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta} \\ +A\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta} \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$v\frac{du}{d\Phi} - u\frac{dv}{d\Phi} = -\alpha\left(1-\theta\right)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}\left\{\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right] + A\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)\right\}$$

Además,

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right]^2}$$

Entonces

$$B'\left(\Phi\right) = \left(\frac{\theta C_0^{1-\theta}}{1-\theta}\right)\left[\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{d\Phi} - u\frac{dv}{d\Phi}\right)\right]$$

$$B'\left(\Phi\right) = \left(\frac{\theta C_0^{1-\theta}}{1-\theta}\right)\frac{-\alpha\left(1-\theta\right)\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}\left\{\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right] + A\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)\right\}}{\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right]^2}$$

Pero, $B'\left(\Phi\right) = 0$, por lo cual podemos despejar como sigue:

$$\left[\rho - \left(1-\theta\right)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right)\right] + A\left(1+\Phi^{-\alpha}\right) = 0$$

Realizando las operaciones algebraicas para después reagrupar los términos en Φ:

$$\rho - (1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha} - \delta\right) + A + A\Phi^{-\alpha} = 0$$

$$\rho - (1-\theta)\, A\Phi^{-\alpha} + (1-\theta)\,\delta + A + A\Phi^{-\alpha} = 0$$

$$\rho + (1-\theta)\,\delta + A = (1-\theta)\, A\Phi^{-\alpha} - A\Phi^{-\alpha} = \Phi^{-\alpha}\,(A - \theta A - A)$$

$$\rho + (1-\theta)\,\delta + A = \Phi^{-\alpha}\,(-\theta A)$$

Esto es

$$\Phi^{-\alpha} = \frac{\rho + (1-\theta)\,\delta + A}{-\theta A} = -\frac{\rho + (1-\theta)\,\delta + A}{\theta A}$$

Observemos que si $0 < \theta < 1$, la fracción anterior será negativa, por ende se requiere que $\theta > 1$, como primer requisito para la positividad del término. Pero, además será necesario que:

$$\rho + (1-\theta)\,\delta + A < 0$$

$$\rho + \delta - \theta\delta + A < 0 \Leftrightarrow \rho + \delta + A < \theta\delta$$

$$\frac{\rho + \delta + A}{\delta} < \theta \Leftrightarrow \frac{\rho + A}{\delta} + 1 < \theta$$

Esto es, se requiere que:

$$\theta > 1; \qquad \theta > 1 + \left(\frac{\rho + A}{\delta}\right).$$

Esto es una opción; otra opción es que simplemente:

$$\rho < (\theta - 1)\,\delta - A$$

Una vez cumplidas las condiciones de, por ejemplo, la primera opción, podemos concluir que hay un punto crítico positivo ($\Phi^* > 0$) en:

$$\Phi^* = \left[-\frac{\rho + (1-\theta)\,\delta + A}{\theta A}\right]^{-\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{(\theta - 1)\,\delta - \rho - A}{\theta A}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Veamos ahora la naturaleza de dicho punto crítico.

CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN. Haremos uso de

$$B''(\Phi^*) < 0 \Leftrightarrow B_{\max}(\Phi)$$

$$B''(\Phi^*) > 0 \Leftrightarrow B_{\min}(\Phi)$$

Debemos determinar entonces el signo de la segunda derivada. Realizamos ese cálculo a continuación:

$$B''(\Phi) = \frac{d}{d\Phi}B'(\Phi)$$

donde

$$B'(\Phi) = \left(\frac{\theta C_0^{1-\theta}}{1-\theta}\right) \frac{-\alpha(1-\theta)(1+\Phi^{-\alpha})^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}\{[\rho-(1-\theta)(A\Phi^{-\alpha}-\delta)]+A(1+\Phi^{-\alpha})\}}{[\rho-(1-\theta)(A\Phi^{-\alpha}-\delta)]^2}$$

Tratemos de simplificar un poco:

$$\left[\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right)\right]+A\left(1+\Phi^{-\alpha}\right) = \rho - A\Phi^{-\alpha}+\delta+\theta A\Phi^{-\alpha}-\theta\delta+A+A\Phi^{-\alpha}$$

$$= \rho+(1-\theta)\delta+\theta A\Phi^{-\alpha}+A$$

Sea $a_1 = \rho+(1-\theta)\delta+A$,

$$\left[\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right)\right]+A\left(1+\Phi^{-\alpha}\right) = a_1+\theta A\Phi^{-\alpha}$$

entonces

$$B'(\Phi) = \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\frac{(1+\Phi^{-\alpha})^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}(a_1+\theta A\Phi^{-\alpha})}{[\rho-(1-\theta)(A\Phi^{-\alpha}-\delta)]^2}$$

Simplifiquemos un poco más:

$$\begin{aligned}\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right) &= \rho-(1-\theta)A\Phi^{-\alpha}+(1-\theta)\delta \\ &= a_1-A-(1-\theta)A\Phi^{-\alpha}\end{aligned}$$

Sea $a_2 = a_1 - A$,

$$\rho-(1-\theta)\left(A\Phi^{-\alpha}-\delta\right) = a_2-(1-\theta)A\Phi^{-\alpha}$$

Luego

$$B''(\Phi) = \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{(1+\Phi^{-\alpha})^{-\theta}\Phi^{-\alpha-1}(a_1+\theta A\Phi^{-\alpha})}{[a_2-(1-\theta)A\Phi^{-\alpha}]^2}\right\}$$

Notemos que

$$\Phi^{-\alpha-1}\left(a_1+\theta A\Phi^{-\alpha}\right)=a_1\Phi^{-\alpha-1}+\theta A\Phi^{-2\alpha-1}$$

Tal que

$$B''(\Phi)=\left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\quad\left(a_1\Phi^{-\alpha-1}+\theta A\Phi^{-2\alpha-1}\right)}{\left[a_2-(1-\theta)A\Phi^{-\alpha}\right]^2}\right\}$$

El problema es calcular (o más bien, determinar el signo de)

$$\frac{d}{d\Phi}\left\{\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\quad\left(a_1\Phi^{-\alpha-1}+\theta A\Phi^{-2\alpha-1}\right)\quad\left[a_2-(1-\theta)A\Phi^{-\alpha}\right]^{-2}\right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\Phi}(u\cdot v\cdot w) &= \frac{d}{d\Phi}(u\cdot(v\cdot w))=u\frac{d}{d\Phi}(v\cdot w)+(v\cdot w)\frac{du}{d\Phi}\\ &= u\left(v\frac{dw}{d\Phi}+w\frac{dv}{d\Phi}\right)+(v\cdot w)\frac{du}{d\Phi}\\ &= (u\cdot v)\frac{dw}{d\Phi}+(u\cdot w)\frac{dv}{d\Phi}+(v\cdot w)\frac{du}{d\Phi}\end{aligned}$$

Calculamos entonces las derivadas de w, v y u. Empezamos con u:

$$u=\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}>0$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\Phi} &= \frac{d}{d\Phi}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}=-\theta\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta-1}\frac{d}{d\Phi}\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)=-\theta\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta-1}\frac{d}{d\Phi}\left(\Phi^{-\alpha}\right)\\ &= -\theta\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta-1}\left(-\alpha\Phi^{-\alpha-1}\right)=\alpha\theta\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta-1}\Phi^{-\alpha-1}\end{aligned}$$

$$\frac{du}{d\Phi}=\alpha\theta\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta-1}\Phi^{-\alpha-1}>0$$

Ahora con v:

$$v=\left(a_1\Phi^{-\alpha-1}+\theta A\Phi^{-2\alpha-1}\right)$$

No podemos determinar el signo de v, pues $a_1<0$ (ya que $a_1=\rho+(1-\theta)\delta+A<0$, pues $\theta>1+\left(\frac{\rho+A}{\delta}\right)$ es equivalente a $\rho+(1-\theta)\delta+A<0$).

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\Phi} &= \frac{d}{d\Phi}\left(a_1\Phi^{-\alpha-1}+\theta A\Phi^{-2\alpha-1}\right)=a_1(-\alpha-1)\Phi^{-\alpha-2}+\theta A(-2\alpha-1)\Phi^{-2\alpha-2}\\ &= -\Phi^{-\alpha-2}\left[a_1(\alpha+1)+\theta A(2\alpha+1)\Phi^{-\alpha}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{dv}{d\Phi}=-\Phi^{-\alpha-2}\left[a_1(\alpha+1)+\theta A(2\alpha+1)\Phi^{-\alpha}\right]$$

Por último, con w:

$$w = \left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-2} > 0$$

Nótese que $a_2 < 0$, pues $a_2 = a_1 - A$ y $a_1 < 0$. Continuemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\Phi} &= \frac{d}{d\Phi}\left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-2} = (-2)\left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-3}\frac{d}{d\Phi}\left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right] \\
&= (-2)\left[-(1-\theta)\right] A\ \left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-3}\frac{d}{d\Phi}\left[\Phi^{-\alpha}\right] \\
&= 2(1-\theta) A\ \left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-3}(-\alpha)\,\Phi^{-\alpha-1} \\
&= -2\alpha(1-\theta) A\ \left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-3}\Phi^{-\alpha-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{dw}{d\Phi} = -2\alpha(1-\theta) A\ \left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-3}\Phi^{-\alpha-1}$$

Regresamos al principio

$$B''(\Phi) = \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{(1+\Phi^{-\alpha})^{-\theta}\quad (a_1\Phi^{-\alpha-1} + \theta A\Phi^{-2\alpha-1})}{[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}]^2}\right\}$$

el término $\left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)$, es negativo; así que basta con la derivada evaluada en el punto crítico sea positiva, y tendremos un máximo beneficio en θ^*. Veamos con cuidado la descomposición de la derivada:

$$\begin{aligned}
B''(\Phi) &= \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}\left\{\frac{(1+\Phi^{-\alpha})^{-\theta}\quad (a_1\Phi^{-\alpha-1} + \theta A\Phi^{-2\alpha-1})}{[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}]^2}\right\} \\
&= \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\ \frac{d}{d\Phi}\left\{\left(1+\Phi^{-\alpha}\right)^{-\theta}\quad \left(a_1\Phi^{-\alpha-1} + \theta A\Phi^{-2\alpha-1}\right)\quad \left[a_2 - (1-\theta) A\Phi^{-\alpha}\right]^{-2}\right\} \\
&= \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\frac{d}{d\Phi}(u\cdot v\cdot w) \\
&= \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\left[(u\cdot v)\frac{dw}{d\Phi} + (u\cdot w)\frac{dv}{d\Phi} + (v\cdot w)\frac{du}{d\Phi}\right]
\end{aligned}$$

Hasta ahorita sabemos que:

$$\left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right) < 0$$

$$u, w, \frac{du}{d\Phi} > 0$$

Pero

$$v, \frac{dv}{d\Phi}, \frac{dw}{d\Phi},\ \text{¿signo?}$$

¿Qué podemos hacer? ¿Qué necesitamos?

$$(u \cdot v)\,\frac{dw}{d\Phi} > 0 \Rightarrow v \cdot \frac{dw}{d\Phi} > 0 \tag{a}$$

$$(u \cdot w)\,\frac{dv}{d\Phi} > 0 \Rightarrow \frac{dv}{d\Phi} > 0 \tag{b}$$

$$(v \cdot w)\,\frac{du}{d\Phi} > 0 \Rightarrow v > 0 \tag{c}$$

Luego, por (a) y (c), debe verificarse que:

$$\frac{dw}{d\Phi} > 0$$

Esto es se requiere que

$$v, \frac{dv}{d\Phi}, \frac{dw}{d\Phi} > 0$$

¿Qué condiciones en los parámetros permiten que tales desigualdades se cumplan ?

$$v = \left(a_1\Phi^{-\alpha-1} + \theta A\Phi^{-2\alpha-1}\right) = \Phi^{-\alpha-1}\left(a_1 + \theta A\Phi^{-\alpha}\right)$$

Para que $v > 0$, basta con que $a_1 + \theta A\Phi^{-\alpha} > 0$.

$$\Phi^* = \left[-\frac{\rho + (1-\theta)\,\delta + A}{\theta A}\right]^{-\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{(\theta-1)\,\delta - \rho - A}{\theta A}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$(\Phi^*)^{-\alpha} = \left[\frac{(\theta-1)\,\delta - \rho - A}{\theta A}\right]$$

$$\begin{aligned}
a_1 + \theta A\,(\Phi^*)^{-\alpha} &= a_1 + \theta A\left[\frac{(\theta-1)\,\delta - \rho - A}{\theta A}\right] = a_1 + [(\theta-1)\,\delta - \rho - A] \\
&= \rho + (1-\theta)\,\delta + A + [(\theta-1)\,\delta - \rho - A] \\
&= (1-\theta)\,\delta + (\theta-1)\,\delta = \delta\,(1-\theta+\theta-1) = 0
\end{aligned}$$

Luego

$$v = \Phi^{-\alpha-1}\left(a_1 + \theta A\Phi^{-\alpha}\right) = \Phi^{-\alpha-1}\,(0) = 0$$

Y simplificamos:

$$B''(\Phi) = \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\left[(u \cdot w)\,\frac{dv}{d\Phi}\right]$$

Basta con que

$$\frac{dv}{d\Phi} > 0$$

y habremos terminado la prueba.

$$\frac{dv}{d\Phi} = -\Phi^{-\alpha-2}\left[a_1(\alpha+1) + \theta A(2\alpha+1)\Phi^{-\alpha}\right]$$

Para que $\frac{dv}{d\Phi} > 0$, es suficiente con que

$$a_1(\alpha+1) + \theta A(2\alpha+1)(\Phi^*)^{-\alpha} < 0$$

Veamos si ocurre así:

$$\left.\frac{dv}{d\Phi}\right|_{\Phi^*} = -(\Phi^*)^{-\alpha-2}\left[a_1(\alpha+1) + \theta A(2\alpha+1)(\Phi^*)^{-\alpha}\right]$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dv}{d\Phi}\right|_{\Phi^*} &= -(\Phi^*)^{-\alpha-2}\left\{a_1(\alpha+1) + \theta A(2\alpha+1)\left[\frac{(\theta-1)\delta-\rho-A}{\theta A}\right]\right\} \\
&= -(\Phi^*)^{-\alpha-2}\left\{a_1(\alpha+1) + (2\alpha+1)\left[(\theta-1)\delta-\rho-A\right]\right\} \\
&= -(\Phi^*)^{-\alpha-2}\left\{a_1(\alpha+1) - (2\alpha+1)\left[(1-\theta)\delta+\rho+A\right]\right\}
\end{aligned}$$

Pero $a_1 = \rho + (1-\theta)\delta + A$, entonces

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dv}{d\Phi}\right|_{\Phi^*} &= -(\Phi^*)^{-\alpha-2}\left[a_1(\alpha+1) - (2\alpha+1)a_1\right] \\
&= -(\Phi^*)^{-\alpha-2}a_1\left[(\alpha+1) - (2\alpha+1)\right] \\
&= -(\Phi^*)^{-\alpha-2}a_1(-\alpha) \\
&= a_1\alpha(\Phi^*)^{-\alpha-2} < 0
\end{aligned}$$

pues $a_1 < 0$. Por tanto,

$$B''(\Phi^*) = \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\left[(u\cdot w)\frac{dv}{d\Phi}\right] = (-)(+)(+)\left[(+)(+)(-)\right] > 0$$

$$B''(\Phi^*) = \left(-\alpha\theta C_0^{1-\theta}\right)\left[(u\cdot w)\frac{dv}{d\Phi}\right] > 0; \quad \Rightarrow B(\Phi^*) = B_{\min}(\Phi)$$

y en lugar de un máximo beneficio tenemos un beneficio mínimo. □

Capítulo 5. Conclusiones.

En el capítulo 1 de esta tesis, realizamos una introducción relativamente amplia de la teoría del crecimiento económico. Señalamos que el crecimiento económico está ligado al bienestar de una sociedad pues, en la medida que una nación experimenta crecimiento de su producción y por ende, de su ingreso, habrá mayor posibilidad de que el bienestar de las personas sea mayor, tras una distribución socialmente eficiente del ingreso. Así, cuando hablamos de "crecimiento económico" queremos decir que el nivel de vida de todas las personas debe ir en aumento. En este primer capítulo hemos abordado el modelo de Solow–Swan como antecedente pionero de la teoría actual del crecimiento económico, así como el enfoque de

Ramsey–Cass–Koopmans que considera agentes maximizadores de su bienestar. Más adelante, se presentaron dos versiones representativas (modelo AK de S. Rebelo y modelo de gasto público de R. Barro) de la denominada corriente endógena del crecimiento. En particular, hemos visto cómo estos modelos dan lugar a recomendaciones de política económica que quizá ya eran relativamente familiares pero que ignorábamos su origen. Buena parte de tales medidas provienen de estos modelos y de otros cómo los que aquí hemos estudiado.

En el capítulo 2, retomamos el hecho de que por mucho tiempo un patrón malthusiano en la dinámica poblacional laboral, ha sido piedra angular en las teorías del crecimiento económico. Destacamos que por lo general, se evita la incorporación de modelos poblacionales más complejos pero también más realistas. En este capítulo se analizaron los cambios y similitudes que se presentan cuando relajamos la perspectiva malthusiana en la dinámica poblacional laboral, y utilizamos en su lugar algunos modelos demográficos más apropiados para las sociedades humanas.

Lo que aquí hemos mostrado es que elevando gradualmente la complejidad funcional de la dinámica poblacional vía la introducción de supuestos más realistas a nivel demográfico como la migración o la limitación de espacio, se tienen resultados marcadamente diferentes en la trayectoria a corto plazo de la economía, pero también se muestra que las diferencias desaparecen en el largo plazo. Esto es, la mecánica del crecimiento económico sigue siendo muy parecida en el largo plazo, aunque a corto plazo no ocurre así.

De esta manera, hemos podido considerar estructuras concebibles para la evolución en el tiempo de la población trabajadora. Como hemos visto, podemos concluir que aún cuando al introducir mejores modelos poblacionales se agrega un mayor e importante grado de realismo, ciertamente los beneficios de su inclusión quizá no superen las complejidades de su manipulación, por lo que este balance es lo que motiva el hecho de que, en la literatura de corte más bien econométrico sobre crecimiento económico aún predomine: a) el supuesto simple de que los trabajadores se reproducen siguiendo la ley de Malthus o bien, b) la consideración de que la fuerza laboral es constante.

En el capítulo 3 se presentó una propuesta inspirada en el trabajo previo de Nelson y Phelps para modelar la dinámica de cambio tecnológico entre dos economías nacionales, una con características de liderazgo técnico y otro rezagada. Se encontró que en el largo plazo, la brecha tecnológica entre las economías converge a un estado estacionario tal que, conservar o intercambiar las posiciones de liderazgo depende del esfuerzo gubernamental en cada país. En particular, se muestra que –para un país rezagado– el hecho de incrementar el número de científicos y tecnólogos así como el financiamiento gubernamental en I+D (de manera que se superen las correspondientes cifras del país líder), permite el esperado rebase (tanto en el aspecto técnico como en el de mayor crecimiento económico).

En el capítulo 4, en el marco de una versión simplificada de un modelo de Easterly sobre crecimiento y economía informal, se resolvió el problema de control óptimo de encontrar las trayectorias que maximizan la función de bienestar social sujeta a las restricciones dinámicas correspondientes de cada uno de dos tipos posibles de capital: formal e informal. Con ello, y tras definir una ecuación apropiada para modelar la aportación de los servicios públicos al bienestar, se encontró una expresión analítica para la función de bienestar social dependiente de la proporción de capitales informal a formal, Φ.

Luego, se probó que hay un bienestar social mínimo con un sector informal no nulo, lo que apoya la idea de procurar su desaparición o al menos su reducción.

APÉNDICE A.
Microfundamentos en la Condición de Equilibrio Macroeconómico (modelo de Solow).[40]

En el modelo de Solow–Swan, hacemos uso de la condición de equilibrio macroeconómico: $Y = C + S$ (el producto se consume o se ahorra), como punto de partida. En esta sección veremos que dicha condición puede obtenerse a partir de microfundamentos, esto es, considerando explícitamente la presencia de mercados.

PROPOSICIÓN A.1. La condición de equilibrio macroeconómico, $Y = C + S$ (o bien: $Y = C + I$), utilizada para deducir la ecuación fundamental de Solow, puede derivarse a partir de la incorporación explícita de los mercados de: (a) trabajo, (b) activos financieros, y (c) bienes producidos.

Demostración. Consideremos una economía de mercado en donde existen dos agentes: los hogares y las empresas, los primeros maximizan su utilidad o bienestar (que depende del nivel de consumo) y los segundos maximizan su beneficio. La restricción de los hogares es el ingreso salarial, y la restricción de las empresas es el ingreso financiero. Respecto a los hogares, el ingreso total de las familias resulta ser:[41]

$$\begin{aligned} \begin{matrix} Ingreso \\ Familiar \end{matrix} &= \begin{matrix} Ingreso \\ Salarial \end{matrix} + \begin{matrix} Ingreso \\ por\ Activos \end{matrix} \\ &= w\,L + r\,A \end{aligned}$$

donde w es el salario, L es el número de trabajadores, A son los activos (cuentas bancarias, bonos corporativos si se compran, o acciones si se adquieren y están en la bolsa de valores) y r es el rendimiento de los activos. Este ingreso familiar se puede consumir o ahorrar:[42]

$$\begin{aligned} \begin{matrix} Ingreso \\ Familiar \end{matrix} &= pC + S \\ w\,L + r\,A &= pC + S \end{aligned}$$

donde p es el precio del producto y el ahorro está dado por la variación de los activos financieros: $S = dA/dt = \dot{A}$. Luego,

$$w\,L + r\,A = pC + \dot{A}$$

Es importante destacar que podemos suponer que los hogares poseen el capital o bien que lo poseen las empresas, matemáticamente es lo mismo. Vamos a suponer que lo tienen los hogares y se lo rentan a las empresas. Además, el capital es el único activo: $A = K$ (luego, $\dot{A} = \dot{K}$).

[40] Este apéndice está basado en Cásares (2010) y Barro et al (2004).

[41] Asumimos que los hogares poseen la mano de obra (trabajo) y activos financieros. Así, por la mano de obra se percibe el salario, w, y por los activos se obtienen rendimientos, r.

[42] Esto es, las familias emplean la renta no consumida para acumular más activos.

Respecto a las empresas, sus niveles de ingreso dependen de la cantidad producida, Y, así como del precio de venta del producto, p, esto es

$$\begin{array}{c} Ingreso \\ de\ las\ Empresas \end{array} = p\ Y$$

Por otro lado, las empresas contratan trabajadores, L, y demandan capital, K, luego sus costos son:

$$\begin{array}{c} Costo \\ de\ las\ Empresas \end{array} = w\ L + r\ K + \delta\ K = w\ L + (r+\delta)\ K$$

donde δ es la tasa de depreciación. Por tanto,[43]

$$\begin{array}{c} Beneficio \\ de\ las\ Empresas \end{array}, B = p\ Y - [w\ L + (r+\delta)\ K]$$

Así, el problema de las empresas consta de maximizar su beneficio, B, que puede abordarse como un ejercicio de optimización bivariable sin restricciones, y para lo cual haremos uso del supuesto de que: $Y = \Psi K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ (con Ψ como productividad de los factores). En particular, de la condición de primer orden tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial L} &= \frac{\partial}{\partial L}(pY - wL - rK - \delta K) = \frac{\partial}{\partial L}\left(p\Psi K^{\alpha} L^{1-\alpha} - wL - rK - \delta K\right) \\ \frac{\partial B}{\partial L} &= p(1-\alpha)\Psi K^{\alpha} L^{-\alpha} - w = 0 \\ &\Rightarrow\ w = p(1-\alpha)\Psi K^{\alpha} L^{-\alpha} = p\frac{\partial Y}{\partial L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K}(pY - wL - rK - \delta K) = \frac{\partial}{\partial K}\left(p\Psi K^{\alpha} L^{1-\alpha} - wL - rK - \delta K\right) \\ \frac{\partial B}{\partial K} &= p\alpha\Psi K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - (r+\delta) = 0 \\ &\Rightarrow\ r = p\alpha\Psi K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta = p\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta \end{aligned}$$

Con este resultado ya podemos escribir la condición de equilibrio macroeconómico (recordemos que en las economías de mercado cada agente toma sus decisiones de forma independiente, pero el mercado las coordina).

$$\begin{aligned} w\ L + r\ A &= pC + \dot{A} \\ w\ L + r\ K &= pC + \dot{K} \end{aligned}$$

$$p\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)\ L + \left[p\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right) - \delta\right]\ K = pC + \dot{K}$$

[43]Es decir, las empresas contratan (rentan) el capital y el trabajo a los hogares para generar una cantidad de producto que se vende a un precio p.

Asumiendo que $p = 1$:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right) \ L + \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right) - \delta\right] \ K = C + \dot{K}$$

Sustityendo los productos marginales:

$$(1-\alpha)\,\Psi K^{\alpha} L^{-\alpha} \ L + \alpha \Psi K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \ K - \delta K = C + \dot{K}$$

$$(1-\alpha)\,\Psi K^{\alpha} L^{1-\alpha} + \alpha \Psi K^{\alpha} L^{1-\alpha} \ - \delta K = C + \dot{K}$$

$$(1-\alpha)\,Y + \alpha Y \ - \delta K = C + \dot{K}$$

$$Y \ - \delta K = C + \dot{K}$$

$$Y = C + \dot{K} + \delta K = C + I$$

pues $\dot{K} = I - \delta K$ (la inversión neta es igual a la inversión bruta menos la depreciación); y esta es la condición de equilibrio en el mercado del bien. □

APÉNDICE B. La versión general del modelo Ramsey–Cass–Koopmans.

En el primer capítulo de esta tesis, hemos visto el modelo de Ramsey–Cass–Koopmans con función de producción Cobb–Douglas y con una función de utilidad concreta. Veamos el caso para funciones generales $f(k)$ neoclásica y $u(c)$ "bien portada". El problema a abordar es el siguiente:

$$\text{Maximizar} \ \ U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c)\, dt$$

Sujeto a

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)\,k$$

PROPOSICIÓN B.1. Para una economía inscrita en el problema anterior, entonces la tasa de crecimiento del consumo viene dada por:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f\,'(k) - (n+\delta+\rho)}{\Omega(c)} \tag{B1}$$

Demostración. Debemos resolver el siguiente ejercicio de optimización dinámica:

$$\text{Maximizar} \ \ U = \int_0^{\infty} u(c) \ \ e^{-(\rho-n)t} dt$$

Sujeto a

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta) k$$

El *Hamiltoniano* en valor presente del problema será[44]

$$H^p(\cdot) = u(c) + \nu^p \ \dot{k}$$

$$H^p(\cdot) = u(c) + \nu^p \ [f(k) - c - (n+\delta) k] \tag{B2}$$

Las Condiciones de Primer Orden son:

$$H_c^p = 0 \tag{B3}$$

$$H_k^p = -\dot{\nu}^p + \rho\nu^p \tag{B4}$$

De (B3) y (B4) se tiene que:

$$\frac{\partial H^p}{\partial c} = H_c^p = 0 \Leftrightarrow u'(c) - \nu^p = 0 \tag{B5}$$

$$\begin{aligned} \nu^p \ [f\,'(k) - (n+\delta)] &= -\dot{\nu}^p + \rho\nu^p \\ &\Rightarrow \ \nu^p \ [f\,'(k) - (n+\delta+\rho)] = -\dot{\nu}^p \end{aligned} \tag{B6}$$

En su forma actual, las ecuaciones (B5) y (B6) no nos permiten resolver el problema, por lo que realizaremos un poco de trabajo adicional:
Rearreglando (B5) y derivando con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt}[u'(c)] = \frac{d}{dt}v^p \Rightarrow u''(c) \ \dot{c} = \dot{\nu}^p$$

Tal que

$$u''(c) \ \dot{c} = -\nu^p \ [f\,'(k) - (n+\delta+\rho)]$$

Sin embargo, $u\,'(c) = v^p$, entonces:

$$u''(c) \ \dot{c} = -u'(c) \ \ [f\,'(k) - (n+\delta+\rho)]$$

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)} \ \dot{c} = f\,'(k) - (n+\delta+\rho)$$

[44]En este apéndice, al tratar la versión general del modelo RCK, emplearemos el hamiltoniano en valor presente, que no debe confundirse con el hamiltoniano "tradicional" utilizado en el primer capítulo. Sin embargo, ambos son equivalentes y el empleo de uno u otro no altera la dinámica del sistema pero sí puede simplificar el tratamiento o manipulación del problema, razón por la que suelen usarse. En concreto, si H es el hamiltoniano "tradicional" y v es la variable de coestado (o multiplicador "dinámico" de Lagrange) asociadas, se define el hamiltoniano en tiempo presente como: $H^p = He^{\rho t}$, siendo la variable de coestado en tiempo presente: $v^p = ve^{\rho t}$, con ρ como tasa de descuento (el superíndice p indica tiempo presente). Detalles adicionales pueden consultarse en Lomelí et al, p. 372–376 (2003).

Pero el término a la izquierda de la igualdad es muy similar al coeficiente de aversión al riesgo relativo de Arrow–Pratt[45]:

$$\Omega\left(c\right) = -c\frac{u''\left(c\right)}{u'\left(c\right)} \tag{B7}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\left[-c\frac{u''\left(c\right)}{u'\left(c\right)}\right]\ \left(\frac{\dot{c}}{c}\right) &= f\ '\left(k\right) - \left(n+\delta+\rho\right) \\
\Omega\left(c\right)\ \left(\frac{\dot{c}}{c}\right) &= f\ '\left(k\right) - \left(n+\delta+\rho\right) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{f\ '\left(k\right) - \left(n+\delta+\rho\right)}{\Omega\left(c\right)} \qquad \text{(B1)}
\end{aligned}$$

que era lo que se quería demostrar. □

PROPOSICIÓN B.2. La economía descrita por nuestro problema de optimización tiene una estabilidad de punto silla en el equilibrio no trivial.

Demostración. Para determinar la estabilidad de la economía, emplearemos la linealización del sistema:

$$F\left(c,k\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \frac{c}{\Omega(c)}\left[f\ '\left(k\right) - \left(n+\delta+\rho\right)\right], \\ f\left(k\right) - c - \left(n+\delta\right)k \end{matrix} \right\} \tag{B8}$$

en los puntos de equilibrio. En particular el equilibrio no trivial (aquel en el que se evita que $k = 0$ y/ó $c = 0$), se verifica:

$$\begin{matrix} f\ '\left(k^*\right) = \left(n+\delta+\rho\right) \\ c^* = f\left(k^*\right) - \left(n+\delta\right)k^* \end{matrix} \tag{B9}$$

Luego, la matriz jacobiana de la aproximación lineal es:

$$J\left(c^*,k^*\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial c} & \frac{\partial F_1}{\partial k} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial c} & \frac{\partial F_2}{\partial k} \end{pmatrix}$$

$$J\left(c^*,k^*\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega(c^*)}\left[f\ '\left(k^*\right) - \left(n+\delta+\rho\right)\right] & \left[\frac{c^*}{\Omega(c^*)}\right]\ f\ ''\left(k^*\right) \\ \\ -1 & f\ '\left(k^*\right) - \left(n+\delta\right) \end{pmatrix} \tag{B10}$$

Pero, por (B9), $f\ '\left(k^*\right) - \left(n+\delta+\rho\right) = 0$; además:

$$\begin{aligned} f\ '\left(k^*\right) - \left(n+\delta\right) &= \left(n+\delta+\rho\right) - \left(n+\delta\right) \\ &= \rho \end{aligned} \tag{B11}$$

[45] Para el caso de las funciones de utilidad manejadas en esta tesis (y en la mayor parte de los modelos de crecimiento económico), el coeficiente de aversión al riesgo relativo es constante: $\Omega\left(c\right) = \theta = cte.$, esto es, son funciones de utilidad ARRC o CARA (por su denominación en inglés), donde θ es independiente de c.

a partir de lo cual, podemos afirmar que la matriz jacobiana está dada por

$$\begin{aligned} J\left(c^{*},k^{*}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega(c^{*})}\left[f'\left(k^{*}\right)-\left(\delta+\rho\right)\right] & \left[\frac{c^{*}}{\Omega(c^{*})}\right] f''\left(k^{*}\right) \\ -1 & f'\left(k^{*}\right)-\left(n+\delta\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \left[\frac{c^{*}}{\Omega(c^{*})}\right] f''\left(k^{*}\right) \\ -1 & \rho \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B12}$$

cuya traza y determinante son:

$$TrJ = 0+\rho = \rho > 0$$

$$DetJ = \left[(0)\left(\rho\right)-\left(-1\right)\frac{c^{*}}{\Omega\left(c^{*}\right)}\ f''\left(k^{*}\right)\right] = \left[\frac{c^{*}}{\Omega\left(c^{*}\right)}\right] f''\left(k^{*}\right) < 0$$

lo cual implica que hay dos raíces reales: una negativa y la otra positiva. Por tanto el estado estacionario (c^{*},k^{*}) es un punto silla. □

APÉNDICE C. Condiciones de Transversalidad.

En el desarrollo de la tesis se hace uso de algunos resultados apoyados en las denominadas condiciones de transversalidad. Dichas condiciones, siguiendo a De la Fuente: “imponen una restricción sobre el valor asintótico de las variables de estado (en nuestro caso, del capital físico). En ausencia de esta restricción, el comportamiento óptimo de los hogares podría involucrar préstamo financiero y consumo no acotados”.[46] En particular están relacionadas con la idea de evitar los juegos Ponzi o de financiamiento piramidal,[47] es decir, evitar que los hogares terminen con deuda en el “infinito” (al final del período de optimización).[48]
La interpretación económica generalmente aceptada de estas condiciones de transversalidad es que el valor del stock de capital debe ser asintóticamente cero, es decir, al término del

[46]De la Fuente, p. 624 (2000).

[47]En la explicación de Lomelí et al, p. 388 (2003): “el nombre proviene de Charles Ponzi que vivió en Boston durante los años veinte del siglo pasado y fue condenado por el fraude de organizar esquemas de inversión tipo “pirámide”. Probablemente el lector ha sido alguna vez víctima de un juego de Ponzi. El que comienza el juego pide dinero,digamos \$100 a n personas, cada una de las cuales hace lo mismo con otros n individuos y así sucesivamente. De esta forma funcionan las cadenas de cartas y las llamadas pirámides. En particular, Charles Ponzi emitió un tipo de bono llamado cupón postal y pagaba los rendimientos de los mismos con nueva deuda, es decir, con la venta de más cupones”.

[48]En otras palabras y siguiendo a Barro y Sala-i-Martin, p. 89 (2004), se trata de financiar el consumo actual tomando dinero prestado, y después utilizar préstamos futuros para refinanciar el principal y cubrir los intereses; haciéndolo sucesivamente y sin que nunca se amortice el principal. Así pues, un hogar que pudiera tomar dinero prestado de esta manera podría financiar un nivel arbitrariamente alto de consumo de manera perpetua.

período de optimización el valor del stock de capital debe ser nulo (entendiéndose por valor del stock de capital al producto: $v(t)\,k(t)$, donde $k(t)$ es el stock de capital físico y $v(t)$ es el precio sombra del capital (o variable de coestado)).[49] Si bien surgen diferencias cuando el horizonte es finito o infinito, Sala–i–Martin destaca la siguiente idea intuitiva: los "individuos optimizadores no quieren dejar nada que tenga valor después de su muerte".[50] O también, se dice que "los padres no dejan nada de herencia", en palabras de E. Cásares.[51]
En este apéndice mostramos y en su caso citamos, cómo se obtienen los resultados utilizados en la tesis, que se derivaron de las condiciones de transversalidad.

C. 1. Modelo de Ramsey–Cass–Koopmans.

Respecto al primer modelo de optimización dinámica abordado en la tesis, se tiene la siguiente:
PROPOSICIÓN C.1. De los dos puntos de equilibrio no triviales en el modelo de Ramsey–Cass–Koopmans desarrollado en la sección 1.9, (k^*, c^*) y $(k^{**}, 0)$, solamente la trayectoria que lleva a (k^*, c^*) verifica la condición de transversalidad, por tanto la única trayectoria recorrida por el sistema es aquella que converge a (k^*, c^*).[52] Luego, el sistema es dinámicamente estable.
Demostración. Véase Sala-i-Martin (2000), p. 102–104, o también: Acemoglu (2009), pp. 302–304. Una prueba más, aunque con el inconveniente de contar con el supuesto adicional: $\delta - \alpha\rho > 0$, es la siguiente: En el modelo RCK de la sección 1.9, las familias maximizan:

$$U = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

sujetas a la restricción presupuestaria:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)\,k$$

y la condición de transversalidad (CT) es:

$$\lim_{t\to\infty} [\nu(t) \cdot k(t)] = 0$$

donde $\nu(t)$ es la variable de coestado, y los puntos de equilibrio no triviales son:

$$\begin{aligned} (k^*, c^*) &= \left(\left(\tfrac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, A(k^*)^\alpha - (n+\delta)\,k^*\right) \\ (k^{**}, 0) &= \left(\left(\tfrac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0\right) \end{aligned} \tag{75}$$

Además,

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = (n+\delta) - f\,'(k) \tag{73}$$

$$\Rightarrow v(t) = v(0)\, e^{\int_0^t [(n+\delta) - f\,'(k)]dt}$$

[49]Barro y Sala-i-Martin, pp. 609–611 (2004).
[50]Sala-i-Martin, p. 48 (1994).
[51]Cásares, *Curso de maestría: Teoría del Crecimiento Económico*, lunes 1 de Marzo (2010).
[52]El equilibrio trivial $(0, 0)$ no es de interés al considerar consumo y capital nulos.

donde $f'(k) = \alpha A k^{-(1-\alpha)}$. Así, en (k^*, c^*):

$$\begin{aligned} f'(k^*) &= \alpha A (k^*)^{-(1-\alpha)} = \alpha A \left[\left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{-(1-\alpha)} = \alpha A \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho} \right)^{-1} \\ f'(k^*) &= \alpha A \left(\frac{\delta + \rho}{\alpha A} \right) = \delta + \rho \end{aligned}$$

En las proximidades de k^*,

$$\left. \frac{\dot{\nu}}{\nu} \right|_{k \approx k^*} = (n + \delta) - f'(k^*) = (n + \delta) - (\delta + \rho) = n - \rho = -(\rho - n) < 0$$

$$\Rightarrow v(t) = v(0)\, e^{-(\rho - n)t}$$

Aplicamos este resultado en la CT, para una vecindad de k^*:

$$\lim_{t \to \infty} \left[v_0 e^{-(\rho - n)t} \cdot k^* \right] = 0$$

y como $\rho - n > 0$, entonces se cumple la CT. Veamos ahora k^{**}.

$$\begin{aligned} f'(k^{**}) &= \alpha A (k^{**})^{-(1-\alpha)} = \alpha A \left[\left(\frac{A}{n + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{-(1-\alpha)} = \alpha A \left(\frac{A}{n + \rho} \right)^{-1} \\ f'(k^{**}) &= \alpha A \left(\frac{n + \rho}{A} \right) = \alpha (n + \rho) \end{aligned}$$

En las cercanías de k^{**},

$$\left. \frac{\dot{\nu}}{\nu} \right|_{k \approx k^{**}} = (n + \delta) - f'(k^{**}) = (n + \delta) - \alpha (n + \rho) = (1 - \alpha) n + (\delta - \alpha \rho) > 0$$

$$\Rightarrow v(t) = v(0)\, e^{[(1-\alpha)n + (\delta - \alpha\rho)]t}$$

Aplicamos este resultado en la CT, para una vecindad de k^{**}:

$$\lim_{t \to \infty} \left[v_0 e^{[(1-\alpha)n + (\delta - \alpha\rho)]t} \cdot k^{**} \right] \neq 0$$

pues la potencia de la exponencial es positiva; por tanto, se viola la CT. Así, la única trayectoria posible para el sistema dinámico es aquella que pasa por (k^*, c^*). $\square$

C. 2. Modelo AK de Rebelo.

Probamos el siguiente resultado:
PROPOSICIÓN C.2. La economía descrita en la sección 1.11.1, verifica la siguiente igualdad:

$$\left[k_0 - \frac{c_0}{(A - n - \delta) - \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)} \right] = 0$$

Demostración. Retomemos el problema de optimización en el modelo de Rebelo: Las familias maximizan la siguiente función de bienestar social:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

sujetas a la restricción presupuestaria:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta) k$$

y la condición de transversalidad (CT) es:

$$\lim_{t \to \infty} [\nu(t) \cdot k(t)] = 0$$

donde $\nu(t)$ es el "multiplicador lagrangiano dinámico" o variable de coestado. El *Hamiltoniano* de nuestro problema es

$$H(\cdot) = u(c)\ e^{-(\rho-n)t} + \nu\ \dot{k}$$

$$H(\cdot) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}\ e^{-(\rho-n)t} + \nu\ [f(k) - c - (n+\delta) k]$$

Las Condiciones de Primer Orden son:

$$H_c = 0$$

$$H_k = -\dot{\nu}$$

De la ecuación

$$H_k = -\dot{\nu}$$

tenemos

$$-\dot{\nu} = \nu\ [A - (n+\delta)]$$

Luego,

$$\nu(t) = v_0 e^{-(A-n-\delta)t}$$

Aplicamos este resultado en la CT:

$$\lim_{t \to \infty} [\nu(t) \cdot k(t)] = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[v_0 e^{-(A-n-\delta)t} \cdot k(t)\right] = 0$$

Si normalizamos $v_0 = 1$,[53] se tiene

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\cdot k(t)\right] = 0$$

En este punto necesitamos hacer uso de la forma funcional concreta de $k(t)$. Retomemos que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

y sustituyendo en:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k = Ak - c - (n+\delta)k$$

tenemos

$$k(t) = \frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t} + \left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]\cdot e^{(A-n-\delta)t}$$

que también podemos escribir como sigue:

$$k(t) = \frac{c(t)}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)} + \left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]\cdot e^{(A-n-\delta)t}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\cdot k(t)\right] &= \lim_{t\to\infty}\left\{\begin{array}{c}\frac{e^{-(A-n-\delta)t}\cdot c_0 e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t}}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)} \\ +\left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]\cdot e^{2(A-n-\delta)t}\end{array}\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-(A-n-\delta)t}\cdot c_0 e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t}}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right] \\
&\quad + \lim_{t\to\infty}\left\{\left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]\cdot e^{2(A-n-\delta)t}\right\}
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\cdot k(t)\right] = 0 + \lim_{t\to\infty}\left\{\left[k_0 - \frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]\cdot e^{2(A-n-\delta)t}\right\}$$

[53] En realidad, no es necesario asumir valores específicos para v_0, puesto que los términos que nos interesan son los que dependen del tiempo:

$$\lim_{t\to\infty}\left[v_0 e^{-(A-n-\delta)t}\cdot k(t)\right] = v_0\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\cdot k(t)\right] = 0$$

pero tomaremos $v_0 = 1$ como simplificación.

puesto que

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-(A-n-\delta)t}\cdot c_0 e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t}}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]=\frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\cdot e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t}\right]$$

donde[54]

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\right]=0;\quad \lim_{t\to\infty}\left[e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t}\right]=\infty.$$

Luego,

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(A-n-\delta)t}\cdot k(t)\right]=\lim_{t\to\infty}\left\{\left[k_0-\frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]\cdot e^{2(A-n-\delta)t}\right\}=0$$

Por tanto, la única forma de que se verifique la condición de transversalidad, es que

$$\left[k_0-\frac{c_0}{(A-n-\delta)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)}\right]=0$$

puesto que $A-n-\delta>0$ (por lo cual el término $e^{2(A-n-\delta)t}$ siempre es positivo)[55]. $\square$

[54]Estamos haciendo uso de que: $A-n-\delta>0$. Este resultado se obtiene de la condición requerida para que converja la integral de bienestar social:

$$U=\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}dt$$

Obsérvese que un primer requisito para que la utilidad esté acotada, es que $\rho>n$. Sabemos que el consumo en todo tiempo viene dado por:

$$c(t)=c_0e^{\gamma_c t}$$

luego $c^{1-\theta}=c_0^{1-\theta}e^{\gamma_c(1-\theta)t}$. Sustituyendo en la función de bienestar:

$$U=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}dt=\frac{1}{1-\theta}\lim_{b\to\infty}\left\{c_0^{1-\theta}\int_0^b e^{-[\rho-n-\gamma_c(1-\theta)]t}dt\right\}$$

Véase que en este punto la acotación de la utilidad se dará siempre que $\rho-n>\gamma_c(1-\theta)$. Pero $\gamma_c=(A-\delta-\rho)/\theta$, así que:

$$(A-\delta-n)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)>0$$

Describimos la obtención de esta desigualdad en el siguiente pie de página.

[55]Con más detalle:

$$\rho-n>\gamma_c(1-\theta)$$

$$\rho-n>\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

$$\rho-n>\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)-\frac{\theta}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

$$\rho-n>\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)-(A-\delta-\rho)$$

BIBLIOGRAFÍA.

A
1. Abad–Ruiz, E.; "Búsqueda de una función de producción para la economía mexicana"; Reporte Monográfico, Vol.1, No. 13, UAM–Iztapalapa, 1981.
2. Acemoglu, Daron; *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press; 1st Edition; 2009.
3. Accinelli, Elvio y Juan Gabriel Brida; "Reformulation of the Solow Economic Growth Model whith the Richards Population Growth Law"; EconWPA 0508006, 2005.

$$\rho - n > \frac{1}{\theta}(A-\delta) - (A-\delta) - \frac{\rho}{\theta} + \rho$$

$$\rho - n > \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)(A-\delta) + \rho\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$$

$$0 > \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(A-\delta) + \rho\left(1 - \frac{1}{\theta} - 1\right) + n$$

$$0 > \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(A-\delta) - \frac{\rho}{\theta} + n$$

$$0 < -\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(A-\delta) + \frac{\rho}{\theta} - n$$

$$0 < \left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)(A-\delta) + \frac{\rho}{\theta} - n$$

$$\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)(A-\delta) + \frac{\rho}{\theta} - n > 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)(A-\delta) + \frac{\rho}{\theta} - n > 0$$

$$(A-\delta) - \frac{1}{\theta}(A-\delta) + \frac{\rho}{\theta} - n > 0$$

$$(A-\delta-n) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho) > 0$$

Esto es, son equivalentes las siguientes desigualdades:

$$\rho - n > \gamma_c(1-\theta)$$

$$\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)(A-\delta) + \frac{\rho}{\theta} - n > 0$$

$$(A-\delta-n) - \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho) > 0$$

y su cumplimiento garantiza que la integral de bienestar social sea convergente. En particular, la última desigualdad puede escribirse:

$$(A-\delta-n) > \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

y como $A-\delta-\rho > 0$ (supuesto) y $\theta > 0$, entonces tenemos: $A-\delta-n > 0$, que es justo el resultado que estamos utilizando.

4. Accinelli, Elvio y Juan Gabriel Brida; "Crecimiento Económico Optimo y Crecimiento Poblacional: Una Versión Mejorada del Modelo de Ramsey"; *Papeles de Población*, Enero–Marzo, No. 47, p. 227–241, 2006.
5. Agénor, Pierre–Richard y Peter J. Montiel; *La Macroeconomía del Desarrollo*; Fondo de Cultura Económica; 2da. Edición, 2000.
6. Aghion, Phillip y Peter Howitt; "A Model of Growth through Creative Destruction", *Econometrica*, Vol. 60 No. 2, pp. 323–351, 1992.
7. Aghion, Phillip y Peter Howitt; *Endogenous Growth Theory*; MIT Press; 1st Edition, 1998.
8. Andrade Rosas, Luis Antonio; "El Modelo de Crecimiento Económico de Solow–Swan con Capital Humano", *Tesis de Licenciatura en Matemáticas*, Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, 2001.
9. Anónimo; *Diagnóstico de la Política Científica, Tecnológica y de Fomento a la Innovación en México (2000 –2006)*; editado por Fondo Consultivo Científico y Tecnológico, A. C., 2006.
10. Anónimo, *La Ciencia en la Integración Latinoamericana*; Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología; 1ra. edición, 1998.
11. Anónimo; *México de un Vistazo*, Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, Edición 2006.
B
12. Barberá de la Torre, Rafael Antonio y Luis Miguel Doncel Pedrera; *La Moderna Economía del Crecimiento*; Editorial Síntesis, 1ra. Edición, 2003.
13. Barrientos Olivares, Javier Alejandro; "La Economía Informal"; *La Voz del Comercio: Mercurio XXI*, núm. 141, p. 30–31, Diciembre 2002.
14. Barro, Robert J.; "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98 No. 5, pp. 103–125, 1990.
15. Barro, Robert J. y Xavier Sala–i–Martin; "Public Finance in Models of Economic Growth", *The Review of Economic Studies*, Vol. 59 No.4, pp. 645–661, 1992.
16. Barro, Robert J. y Xavier Sala–i–Martin; *Economic Growth*; Massachusets Institute of Technology Press, 2nd Edition 1999.
17. Brambila Macías, José; "Remittances, Migration and Informality in Mexico. A Simple Model"; *Munich Personal RePec Archive*, 31 March 2008.
18. Braun, Juan y Norman V. Loayza; "Taxation, Public Services, and the Informal Sector in a Model of Endogenous Growth"; *Policy Research Working Paper* 1334, August 1994.
19. Brida, J.G., G. Mingari Scarpello and D. Ritelli, "The Solow Model with Logistic Manpower: A Stability Analysis"; *SSRN Electronic Paper Collection* WP 785665, 2005.
20. Brida, J. G. y E. Accinelli; "The Ramsey Model with Logistic Population Growth"; *Economics Bulletin*; Vol. 3 No. 15, pp. 1–8, 2007.
21. Burmeister, Edwin y A. Rodney Dobell; *Teorías Matemáticas del Crecimiento Económico*; Antoni Bosch Editor, 1ra. Edición, 1973.
C
22. Calva, José Luis (coordinador); Agenda para el Desarrollo Volumen 5: *Finanzas Públicas para el Desarrollo*; coedición Editorial Porrúa–UNAM, 1ra. Edición, 2007.
23. Calva, José Luis (coordinador); Agenda para el Desarrollo Volumen 10: *Educación, Ciencia, Tecnología y Competitividad*; coedición Editorial Porrúa–UNAM, 1ra. Edición, 2007.

24. Carrillo Huerta, Mario M., José A. Cerón Vargas y Miguel S. Reyes Hernández; *Análisis del Crecimiento Económico*; Instituto Politécnico Nacional, 1ra. Edición, 2007.
25. Cásares–Gil, Enrique; Curso de Crecimiento Económico impartido durante el Trimestre 2010–Invierno, Maestría en Ciencias Económicas, Universidad Autónoma Metropolitana.
26. Cass, David; "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, Vol. 32 No. 3, pp. 233–240, 1965.
27. Cass, David; "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem", *Econometrica*, Vol. 34 No. 4, pp. 833–850, 1966.
28. Cerdá Tena, Emilio; *Optimización Dinámica*; Prentice–Hall, 1ra. Edición 2001.
29. Chapa, Joana, Daniel Flores y Jorge Valero; "Tamaño del Sector Informal y su Potencial Recaudatorio", Universidad Autónoma de Nuevo León, estudio de evasión fiscal publicado en la página del Servicio de Administración Tributaria (SAT: www.sat.gob.mx), 2003.
30. Chapa Cantú, Joana Cecilia, Daniel Flores Curiel y Jorge Noel Valero Gil; *La Economía Informal: Estimaciones, Comportamiento y Potencial Recaudatorio*; Editorial Trillas, 1ra. Edición, 2007.
31. Chiang, Alpha C.; *Elements of Dynamic Optimization*; Waveland Press, 2nd Edition, 2000.
32. Corona Treviño, Leonel; *Teorías Económicas de la Innovación Tecnológica*; Instituto Politécnico Nacional, 1ra. Edición, 2002.
D
33. De la Fuente, Angel; *Mathematical Methods and Models for Economists*; Cambridge University Press, 1st Edition, 2000.
34. De Ferranti, David, Guillermo E. Perry, Indermit Gill, J. Luis Guasch, William F. Maloney, Carolina Sánchez–Páramo y Norbert Schady; *Estudios del Banco Mundial sobre América Latina y el Caribe: Cerrar la Brecha en Educación y Tecnología*; coedición Banco Mundial–Alfaomega Editores 2003.
35. De Soto, Hernando; *El Otro Sendero*; Editorial Diana, 1ra. Edición, 1986.
36. Domar, Evsey D.; "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment ", *Econometrica*, Vol. 14, pp. 137–147, 1946.
37. Dorfman, Robert; "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *The American Economic Review*, Vol. 59 No. 5, pp. 817–831, 1969.
38. Dorfman, Robert; "Errata: An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *The American Economic Review*, Vol. 60 No. 3, p. 524, 1970.
E
39. Easterly, William R.; "Policy Distortions, Size of Government and Growth", *Working Papers Series*, 344: December 1989.
40. Easterly, William R.; "How Much Do Distortions Affect Growth? ", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 32, pp. 187–212, 1993.
41. Easterly, William R.; *En Busca del Crecimiento: Andanzas y Tribulaciones de los Economistas del Desarrollo*; Antoni Bosch Editor, 1ra. Edición, 2001.
42. Easterly, William R.; Chapter 15: "National Policies and Economic Growth: A Reppraisal", in *Handbook of Economic Growth*, Volume 1A edited by Phillippe Aghion and Steven Durlauf; Elsevier, 2005.
43. Escobar Uribe, Diego; *Economía Matemática*; Alfaomega Editores, 2da edición, 2005.
44. Estrada–López, José Luis, "Nuevos Modelos de Crecimiento Endógeno en México", *Análisis Económico*, XV (32): 3–41, 2000.

45. Estrada-López, José Luis y Alcides José Lasa; "Progreso Técnico y Crecimiento Económico: Un Ensayo de Interpretación sobre los Avances Recientes", en *Serie de Investigación 15 (Modelos e Interpretaciones Económico–Financieras: Dimensiones Teóricas y Metodológicas* editado por Fernando Mercado Figueroa) , Universidad Autónoma Metropolitana–Iztapalapa, México 1995.
F
46. Findlay, Ronald; "Relative Backwardness, Direct Foreign Investment and the Transfer of Technology: A Simple Dynamic Model"; *Quarterly Journal of Economics*; Vol. 92, No. 1, pp. 1–16, 1978
47. Findlay, Ronald; "Modeling Global Interdependence: Centers, Peripheries and Frontiers"; *American Economic Review*; Vol. 86, No. 2, pp. 47–51, 1996.
48. Flores Curiel, Daniel y Jorge Noel Valero Gil; "La Formalización de la Economía Informal", en *Finanzas Públicas para el Desarrollo* (Volumen 5 de Agenda para el Desarrollo, coordinado por Jorge Calva); coedición Editorial Porrúa–UNAM, p. 136–148, 2007.
49. Fuentes Flores, Noé Aarón; Alejandro Díaz Bautista y Sarah Eva (coordinadores); *Crecimiento con Convergencia o Divergencia en las Regiones de México: Asimetría Centro–Periferia*, Coedición de El Colegio de la Frontera Norte y de Plaza y Valdés Editores, 1ra edición 2003.
50. Futagami, K., Y. Morita and A. Shibata; "Dynamic Analysis of an Endogenous Growth Model with Public Capital", *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95 No.4, pp. 607–625, 1993.
G
51. Galindo, Miguel Angel y Graciela Malgesini; *Crecimiento Económico: Principales Teorías desde Keynes*; McGraw–Hill, 1ra. edición 1994.
52. Gandolfo, Giancarlo; *Métodos y Modelos Matemáticos de la Dinámica Económica*; Editorial Tecnos, 1ra. Edición, 1976.
53. García Guerrero, Víctor Manuel y Francisco Venegas Martínez; "Control Óptimo Determinista Aplicado al Problema Económico de Crecimiento Endógeno", *Ingeniería: Investigación y Tecnología*, Vol. 6 No. 2, pp. 127–137, 2005.
54. Grossman, Gene M. y Elhanan Helpman; *Innovation and Growth in the Global Economy*, Massachusets Institute of Technology Press, 1st Edition, 1993.
55. Guzmán Chávez, Georgina Alenka; "Las Fuentes Endógenas del Crecimiento Económico", *Economía: Teoría y Práctica*, Vol. 13, pp. 35–60, 2000.
H
56. Haavelmo, Trygve; *A Study in the Theory of Economic Evolution*, North–Holland Publishers, 1st Edition, 1956.
57. Harcourt, G. C. y N. F. Laing; *Capital y Crecimiento*; Fondo de Cultura Económica, 1977.
58. Harris, John R. y Michael P. Todaro; "Migration, Unemployment and Development: A Two Sector Analysis", *American Economic Review*; Vol. 60, pp. 126–142, 1970.
59. Harrod, R. F.; "An Essay in Dynamic Theory", *Economic Journal*, Vol. 49, pp. 14–33, 1939.
60. Helpman, Elhanan; *El Misterio del Crecimiento Económico*; Antoni Bosch Editor, 1ra edición 2004.
61. Herrera Carassou, Roberto; *La Perspectiva Teórica en el Estudio de las Migraciones*; Siglo XXI Editores 1ra. edición, 2006.

62. Intriligator, Michael D.; *Optimización Matemática y Teoría Económica*, Prentice–Hall, 1ra edición 1973.
J
63. Jones, Charles I.; *Introducción al Crecimiento Económico*; Prentice–Hall, 1ra edición 1998.
64. Jones, Hywel; *Introducción a las Teorías Modernas del Crecimiento Económico*; Antoni Bosch Editor, 1ra edición 1979.
K
65. Krugman, Paul; *El Retorno de la Economía de la Depresión*; Editorial Crítica 2000.
66. Loayza, Norman V.; "The Economics of the Informal Sector: A Simple Model and Some Empirical Evidence from Latin America"; *Carnegie–Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 45, pp. 129–162, 1996.
67. Lomelí, Héctor y Beatriz Rumbos; *Métodos Dinámicos en Economía: Otra Búsqueda del Tiempo Perdido*; Thomson Editores, 1ra. edición, 2003.
68. Lucas Jr. , Robert E.; "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, pp. 3–42, 1988.
69. Lugo Abreu, Alvaro; "Crecimiento Económico y Formación de Capital Humano: El Caso de México (1970–1996)"; *Tesis de Licenciatura en Economía*; Facultad de Economía de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2000.
M
70. Mankiw, N. Gregory; David Romer y David Weil; "A Contribution to the Empirics of Economic Growth"; *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 107 No. 2, pp. 407–437, 1992.
71. Mankiw, N. Gregory; "The Growth of Nations"; *Brookings Papers on Economic Activity,* 1: 275–326, 1995.
72. Mayer–Foulkes, David. "The Impact of Free Trade and FDI: Banana Republic or Miracle Growth?"; Mimeo, 2007.
73. Mayer–Foulkes, David; "Development and Underdevelopment: 1500–2000"; *Conference on Latin American Economies: History and Globalization*; University of California at Los Angeles, 2009.
74. Mayer–Foulkes, David; "Long–Terms Fundamentals of the 2008 Economic Crisis"; *XIV Conference on Dynamics, Economic Growth and International Trade*; University of California at Los Angeles, 2009.
75. Mingari Scarpello, G. y D. Ritelli; "The Solow Model Improved Through the Logistic Manpower Growth Law"; *Annali Università di Ferrara–Sez VII*; Vol. IL, pp. 73–83, 2003.
76. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario, "Convergencia Tecnológica y Dinámica de Crecimiento Económico en dos Modelos Norte–Sur", *III Foro Académico de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM–Iztapalapa*, 2007.
77. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario, "Sobre dos Modelos Endógenos Norte–Sur de Crecimiento Económico", *XL Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, 15–19 de Octubre de 2007, Universidad Autónoma de Nuevo León.
78. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario; "Economía Informal y Tecnología: Implicaciones en el Crecimiento Económico", *Memorias del Segundo Congreso Latinoamericano de Estudiantes de Matemáticas*, San Luis Potosí 2008, Universidad Autónoma de San Luis Potosí e Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica.
79. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario, "Sobre la Relajación de la Dinámica Malthusiana en el Crecimiento Económico *á la* Solow", *XIII Reunión Nacional de Física y Matemáticas*,

Instituto Politécnico Nacional, 2008.
80. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario, "Rezago y Rebase Tecnológico en el Marco de un Modelo de Crecimiento Económico", *IV Foro Académico de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM–Iztapalapa*, 2008.
81. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario; "Sobre Cómo ser Líder Tecnológicos y la Desaparición de la Economía Informal", *Segunda Escuela Internacional de Modelación Matemática y Matemáticas Aplicadas*, Puebla 2009, Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla.
82. Moctezuma Navarro, Eduardo Macario; "Migración, Tecnología y Economía Informal: Consecuencias sobre el Crecimiento", *Segundo Encuentro Internacional: Bienestar, Crecimiento y Trampas de Pobreza*, San Luis Potosí 2009, Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
83. Morishima, Michio; *Teoría del Crecimiento Económico*; Editorial Tecnos; 1ra. Edición, 1973.
84. Musgrave, Richard A. y Peggy B. Musgrave; *Hacienda Pública Teórica y Aplicada*; McGraw–Hill, 5ta. Edición, 1992.
N
85. Nelson, Richard R. y Edmund S. Phelps; "Investment in Humans, Technological Diffusion and Economic Growth"; *American Economic Review*; Vol. 56, No. 1/2, pp. 69–75, 1966.
86. Nelson, Richard R., Merton J. Peck, y Edward D. Kalachek; *Tecnología, Crecimiento Económico y Bienestar Público*; 1ra. Edición, p. 91–101 y 119–143, coedición Limusa–John Wiley & Sons, 1969.
O
P
87. Patiño Tovar, Elsa y Jaime Castillo Palma (compiladores); *Trabajo y Migración* (2do. Congreso RNIU: Investigación Urbana y Regional); coedición BUAP–Red de Investigación Urbana, A.C., 1ra. Edición 2001.
88. Perko, Lawrence; *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer–Verlag, 3rd Edition, 2001.
89. Petraglia, Carmelo; "An Endogenous Growth Model with Productive Public Spending and Uncertain Lifetime Consumers"; *Discussion Papers in Economics*; núm. 10, The University of York, 2003.
90. Pieretti, Patrice y Benteng Zou; "An Extended Solow Growth Model with Emigration: Transitional Dynamics and Skills Complementarity"; *Economics Bulletin*; Vol. 6 No. 35, pp. 1–11, 2007.
91. Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze y E. F. Mishchenko; *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers 1962.
92. Puyana Ferreira, Jaime; *Modelos Macroeconómicos de Crecimiento*; UAM–Iztapalapa, 1ra. Edición, 1995.
R
93. Ramsey, Frank Paul; "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, Vol. 38 No. 152, pp. 543–559, 1928.
94. Rebelo, Sergio; "Long–Run Policy Analysis and Long–Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 99 No. 3, pp. 500–521, 1991.
95. Robertson, Paul y Stanislaw Wellis; "Steady–State Growth of an Economy with Intersectoral Migration", *Oxford Economic Papers*, Vol. 29 No. 3, pp. 370–388, 1977.

96. Rogers, Mark; *Knowledge, Technological Catch–up and Economic Growth*; Edward Elgar Publishing, 1st Edition, 2003.
97. Romer, David; *Macroeconomía Avanzada*; McGraw–Hill, 2da edición, 2002.
98. Romer, Paul; "Increasing Returns and Long–Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94 No. 5, pp. 1002–1037, 1986.
99. Romer, Paul; "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, Vol. 98 No. 5, pp. S71–S102, 1990.
100. Ros, Jaime; *La Teoría del Desarrollo y la Economía del Crecimiento*; coedición Fondo de Cultura Económica–Centro de Investigación y Docencia Económicas, 1ra. Edición en español, 2004 (traducción de la 1ra. Edición en inglés, 2000).
101. Rosenberg, Nathan; *Economía del Cambio Tecnológico*, Fondo de Cultura Económica, 1ra Edición 1979.
S
102. Sala–i–Martin, Xavier; *Apuntes de Crecimiento Económico*; Antoni Bosch Editor, 1ra. Edición, 1994.
103. Sala–i–Martin, Xavier; *Apuntes de Crecimiento Económico*; Antoni Bosch Editor, 2da. Edición, 2000.
104. Sen, Amartya (editor); *Economía del Crecimiento*, Fondo de Cultura Económica, 1ra. Edición, 1979.
105. Shieh, J. Y., Ch. Lai y W. Chang; "The Impact of Military Burden on Long–Run Growth and Welfare", *Journal of Development Economics*, Vol. 68, pp. 443–454, 2002.
106. Shone, Ronald; *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application*; Cambridge University Press, 2nd Edition, 2002.
107. Snowdon, Brian y Howard R. Vane; *Modern Macroeconomics: Its Origins, Development and Current State*; Edward Elgar Publishing, 1st Edition, 2005.
108. Solís, Leopoldo (coordinador); *El Futuro Inmediato y Mediato de la Economía Mexicana*; El Colegio Nacional, 2007.
109. Solow, Robert M.; "A Contribution to the Theory of Economic Growth"; *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70 No. 1, pp. 65–94, 1956.
110. Solow, Robert M.; "Technical Change and the Aggregate Production Function"; *Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, pp. 312–320, 1957.
111. Stiglitz, Joseph E.; *La Economía del Sector Público*; Antoni Bosch Editores; 2da. Edición, 1995.
T
112. Taylor, Lance; *Modelos Macroeconómicos para los Países en Desarrollo*; Fondo de Cultura Económica, 1ra. Edición en español, 1986 (traducción de la 1ra. edición en inglés, 1979).
113. Thirwall, Anthony P.; *La Naturaleza del Crecimiento Económico: Un Marco Alternativo para Comprender el Desempeño de las Naciones*; Fondo de Cultura Económica, 1ra. Edición en español 2003 (traducción de la 1ra. edición en inglés, 2000).
114. Todaro, Michael P.; "A Model of Migration and Urban in Less Developed Countries", *American Economic Review*; Vol. 59, pp. 138–148, 1969.
V
115. Vázquez Pérez, Andrés; "La Elasticidad de Sustitución entre Factores de Producción"; *Revista de Economía Política*; Núm. 51–52, Enero–Agosto, p. 545–611, 1969.

116. Venegas–Martínez, Francisco; “A Stochastic Model of Endogenous Growth: The Mexican Case, 1930–2002”; *Análisis Económico*; Núm. 43 Vol. XX, p. 83–100, 2005.
117. Villagrán Hernández, Alejandro; “Un Modelo de Crecimiento Económico Endógeno con Gasto en Educación”, *Tesis de Licenciatura en Actuaría*, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2000.
W
118. Weil, David N.; *Crecimiento Económico*, coedición Pearson–Addison Wesley, 1ra. Edición, 2006.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00047
Matrícula: 205280322

SOBRE EL EFECTO DE LA DINAMICA LABORAL, LA TECNOLOGIA Y EL SECTOR INFORMAL EN EL CRECIMIENTO ECONOMICO

En México, D.F., se presentaron a las 10:00 horas del día 23 del mes de abril del año 2010 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. DAVID ARIE MAYER FOULKES
DR FELIPE DE JESUS PEREDO RODRIGUEZ
DR. LEOBARDO PEDRO PLATA PEREZ
DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: EDUARDO MACARIO MOCTEZUMA NAVARRO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

Eduardo Macario Moctezuma Navarro

EDUARDO MACARIO MOCTEZUMA NAVARRO
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA

PRESIDENTE

DR. DAVID ARIE MAYER FOULKES

VOCAL

DR FELIPE DE JESUS PEREDO RODRIGUEZ

VOCAL

DR. LEOBARDO PEDRO PLATA PEREZ

SECRETARIO

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ